另一种语言的 Maxwell 方程

楔积、外微分与 Hodge 对偶

周文斌　洪子坤　张悦水

电动力学讨论班

中山大学

2026 年 10 月 26 日



报告分工

部分	内容	主讲
I	从电动力学到相对论：最短回顾	张悦水
II	楔积与外微分	张悦水
III	电磁场张量与无源方程 $\mathbf{d}F = 0$	洪子坤
IV	Hodge 对偶与有源方程 $\mathbf{d} \star F = \star J$	洪子坤
V	联络、曲率、Bianchi 与 Einstein 方程	周文斌
VI	总结	周文斌

主要参考：*Sean Carroll,《Spacetime and Geometry》*
Sec. 1.8 Maxwell；*Sec. 2.9–2.10 Forms*；*Sec. 3.2/3.6/3.7 Curvature*；*Sec. 4.2 Einstein's Equation*

Outline

1. 从电动力学到相对论
2. 楔积与外微分
3. 电磁场张量与无源方程
4. Hodge 对偶与有源方程
5. 联络、曲率与 Einstein 方程
6. 总结

本部分主讲：张悦水

四条方程 + 洛伦兹力

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

矛盾

由方程组可解出波动方程，波速 $a = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \equiv c$ 不含任何参考系信息。

但伽利略变换 $x' = x - vt,\ t' = t$ 会使波速变成 $c \mp v$。

而牛顿力学在伽利略变换下形式不变。

要么电磁学错了，要么时空变换错了

爱因斯坦选了后者：放弃绝对同时性

1905 年的两条公设

1. 相对性原理：一切惯性系中所有物理定律形式相同；
2. 光速不变：真空光速恒为 c。

洛伦兹变换

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$
$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}, \qquad \beta = v/c$$

- 唯一不变量是时空间隔

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$$

- $v \ll c$ 退回伽利略变换；$u' = c$ 时 $u = c$，因果性受保护；
- 关键结论：麦克斯韦方程组本来就是相对论性的，需要被修改的是牛顿的时空观。

四维语言（复习）：本报告一律取 $c=1$

约定：$c=1$（时间与长度同量纲）

$$x^\mu=(t,\boldsymbol{x}),\qquad \partial_\mu=(\partial_t,\nabla)$$
$$A^\mu=(\varphi,\boldsymbol{A}),\qquad J^\mu=(\rho,\boldsymbol{J})$$

恢复 c 的写法：$x^0=ct$，$A^0=\varphi/c$，$J^0=c\rho$，$\partial_0=\frac{1}{c}\partial_t$。
以下全部用 $c=1$。

电磁场张量

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,\qquad F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$$

反对称 $\Rightarrow$ 6 个独立分量：
F_{0i} 三个 $\leftrightarrow \boldsymbol{E}$，　F_{ij} 三个 $\leftrightarrow \boldsymbol{B}$。
号差取 $(-,+,+,+)$；$c=1$ 时 $\mu_0\varepsilon_0=1$。

- 规范势：$A^\mu\to A^\mu+\partial^\mu\Lambda$，而 $F_{\mu\nu}$ 不变；
- 四维波矢 $k^\mu=(\omega,\boldsymbol{k})$、四维动量 $p^\mu=(E,\boldsymbol{p})$ 都是同一种对象；
- 电动力学已经改写为四维语言了。

记号约定

$$T_{[\mu\nu]} \equiv \tfrac{1}{2!}\left(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\right)$$

$$T_{[\mu\nu\rho]} \equiv \tfrac{1}{3!}\Big(T_{\mu\nu\rho}+T_{\nu\rho\mu}+T_{\rho\mu\nu}-T_{\nu\mu\rho}-T_{\mu\rho\nu}-T_{\rho\nu\mu}\Big)$$

方括号 [ ] 表示全反对称化（对括号内所有指标求和、奇置换取负号）；圆括号 ( ) 表示全对称化。

场张量就是反对称化

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv 2\,\partial_{[\mu} A_{\nu]}$$

于是

$$F_{0i} = -E_i, \qquad F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$$

（$c = 1$；$i, j, k = 1, 2, 3$。）

$F_{\mu\nu}$ 与对偶张量 $\star F$ 的矩阵形式（$c=1$）

$F_{\mu\nu}$（下指标）

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&-E_x&-E_y&-E_z\\E_x&0&B_z&-B_y\\E_y&-B_z&0&B_x\\E_z&B_y&-B_x&0\end{pmatrix}$$

$F^{\mu\nu}$（上指标）

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&E_x&E_y&E_z\\-E_x&0&B_z&-B_y\\-E_y&-B_z&0&B_x\\-E_z&B_y&-B_x&0\end{pmatrix}$$

$\star F_{\mu\nu}$（对偶）

$$\star F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&B_x&B_y&B_z\\-B_x&0&E_z&-E_y\\-B_y&-E_z&0&E_x\\-B_z&E_y&-E_x&0\end{pmatrix}$$

读法

- 上下指标只差时间行/列整体变号（$\eta^{00}\eta^{ii}=-1$，空间-空间为 $+1$）；
- 对偶张量 $(\star F)^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ 只是把同一组 6 个分量重新排列：$\boldsymbol{E}\to-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{E}$；
- 因此无源方程也可以写成 $\partial_\mu(\star F)^{\mu\nu}=0$——与有源方程形式对称。

有源方程（2 条 $\to$ 1 条）

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

$\nu = 0$：高斯定律；$\nu = i$：安培--麦克斯韦定律。

无源方程（2 条 $\to$ 1 条）

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0 \iff \partial_\mu (\star F)^{\mu\nu} = 0$$

其中 $(\star F)^{\mu\nu}$ 就是上一页的对偶张量——它把 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互换，于是这一条与有源方程形式完全对称。

同一个方程组，可以用 F 写，也可以用 $\star F$ 写——二者只差 $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ 的互换（$c = 1$）。

“对偶”这个词，之后会升级成 **Hodge** 对偶 $\star$

而 ε 里藏着 $\sqrt{|g|}$，这一点在第三部分会变成物理

指标太多

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ 里要同时盯住上下指标、求和约定和反对称性。

ε 要手写

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ 每次都得显式写出来，$4!$ 个分量太多。

F 的反对称性必须单独写明

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

普通二阶张量不一定反对称；电磁场张量要在定义中显式赋予这一性质。

我们想要的语言： 反对称 $= \wedge$， 求导 $= \mathbf{d}$， 对偶 $= \star$

让“反对称二阶张量”本身成为基本对象——这就是微分形式

Outline

1. 从电动力学到相对论
2. 楔积与外微分
3. 电磁场张量与无源方程
4. Hodge 对偶与有源方程
5. 联络、曲率与 Einstein 方程
6. 总结

本部分主讲：张悦水

1-Form：$(0,1)$ 张量 (对偶矢量)

定义

$\{\mathrm{d}x^\mu\}$ 是对偶基，满足

$$\langle \mathrm{d}x^\mu,\ \partial_\nu \rangle = \delta^\mu{}_\nu$$

一个 1-形式是

$$A = A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu$$

- 分量 A_μ 依赖坐标系，A 本身不依赖；
- 坐标变换下 $A'_{\mu'} = A_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}$ ——这是协变的变换律；
- 梯度 $\mathrm{d}f = (\partial_\mu f)\mathrm{d}x^\mu$ 是最典型的 1-形式。

自然的猜测

$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 合起来有 6 个分量。能装下 6 个分量的最低阶反对称对象，正是2-形式。

p-形式：全反对称的 $(0,p)$ 张量

定义

一个 p-形式是完全反对称的 $(0,p)$ 张量：

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_p} = \omega_{[\mu_1\cdots\mu_p]}.$$

交换任意两个指标即变号；重复指标使分量为零。一点处 p-形式构成 Λ^p；流形 M 上的 p-形式场构成 $\Lambda^p(M)$。

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}$$

$1/p!$ 消除有序基矢的重复计数

熟悉的特例

$p=0$　标量（0-形式）
$p=1$　对偶矢量（1-形式）$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu$
$p=2$　电磁场张量 $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$

独立分量数

在 n 维空间中，

$$\dim\Lambda^p(\mathbb{R}^n) = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

四维依次为 $\boxed{1,4,6,4,1}$；$p>n$ 时没有非零 p-形式。

Wedge Product(楔积)

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \cdots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} A_{[\mu_1 \cdots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \cdots \mu_{p+q}]}$$

两个 1-形式

$$(A \wedge B)_{\mu\nu} = 2A_{[\mu} B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu.$$

基矢满足

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu - \mathrm{d}x^\nu \otimes \mathrm{d}x^\mu.$$

基本性质

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A, \qquad \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu = 0.$$

- 无需额外写 $[\ ]$：楔积已自动完成反对称化；
- 归一化因子保证基矢楔积不出现额外的 $1/2$；
- 楔积只依赖张量代数，不需要度规。

Exterior Derivative d：把 p-形式升一阶

定义

d 把 p-形式映为 $(p+1)$-形式：

$$(\mathbf{d}\omega)_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = (p+1)\,\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]}.$$

也就是说，d 是经过正确归一化的反对称化偏导数。

两个基本结果

0-形式的梯度就是最典型的例子：

$$(\mathbf{d}f)_\mu = \partial_\mu f.$$

分次 Leibniz 法则为

$$\mathbf{d}(\alpha\wedge\beta) = \mathbf{d}\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge\mathbf{d}\beta,$$
$$p = \deg\alpha.$$

为什么它仍然是张量

普通偏导数在坐标变换下会多出一项 $\omega_\mu \dfrac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}$。这一项关于 μ',ν' 对称，被外微分的反对称化直接消去。

先算 0-形式

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^2 f &= \mathbf{d}(\mathrm{d}f) = \mathbf{d}(\partial_\mu f \,\mathrm{d}x^\mu) \\ &= \partial_\nu \partial_\mu f \,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu.\end{aligned}$$

把结果记为 A。依次交换哑指标、使用偏导对称性：

$$\begin{aligned}A &= \partial_\nu \partial_\mu f \,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \\ &= \partial_\mu \partial_\nu f \,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= -\partial_\nu \partial_\mu f \,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = -A.\end{aligned}$$

所以 $2A = 0$，即 $\mathbf{d}^2 f = 0$。

对任意形式也成立

对 $\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}$，有

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^2\omega = \frac{1}{p!}\partial_\rho\partial_\nu\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots.\end{aligned}$$

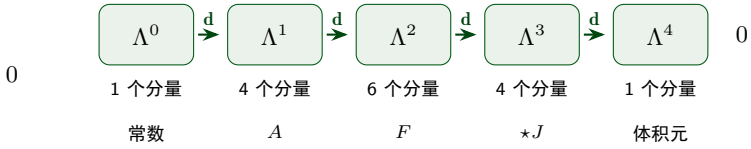
交换 $\rho \leftrightarrow \nu$ 时，$\partial_\rho\partial_\nu$ 对称，而 $\mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\nu$ 反对称。因此整项等于自身的相反数：

$$\mathbf{d}^2\omega = -\mathbf{d}^2\omega \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\mathbf{d}^2\omega = 0}.$$

Outline

1. 从电动力学到相对论
2. 楔积与外微分
3. 电磁场张量与无源方程
4. Hodge 对偶与有源方程
5. 联络、曲率与 Einstein 方程
6. 总结

本部分主讲：洪子坤



$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu$； $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$； $\star J$：电流的 3-形式； $\sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4 x$：不变量体积元

电磁分量

$$F = F_{0i}\, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i + \frac{1}{2} F_{ij}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j.$$

F_{0i} 给出 3 个 $\boldsymbol{E}$ 分量；F_{ij} 给出 3 个 $\boldsymbol{B}$ 分量。

无需度规

F 作为 2-形式及其反对称性只靠坐标与张量代数定义。度规只在 $\star$ 中出现。

把 A 升一阶

$$\begin{aligned}\mathbf{d}A &= \mathbf{d}(A_\mu \mathrm{d}x^\mu) = \partial_\nu A_\mu \, \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)\, \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu.\end{aligned}$$

第二行使用楔积反对称性；第三行只是重命名哑指标 $\nu \leftrightarrow \mu$。这正是分量定义

$$(\mathbf{d}A)_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} = F_{\mu\nu}.$$

$$\boxed{F = \mathbf{d}A}$$

两个显然结果

规范变换

$$A \longmapsto A + \mathrm{d}\chi$$

外微分得到：

$$\mathbf{d}(A + \mathrm{d}\chi) = \mathbf{d}A + \mathbf{d}^2\chi = \mathbf{d}A.$$

Bianchi 恒等式 F：

$$\mathbf{d}F = \mathbf{d}^2 A = 0,$$

。

$$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu, \qquad F = \mathbf{d}A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

电磁场就是一个 2-形式

规范变换变成冗余

$$A \longrightarrow A + \mathbf{d}\lambda \Longrightarrow F \longrightarrow F + \mathbf{d}^2\lambda = F$$

规范自由度 = “F 只看见 A 中被 $\mathbf{d}$ 作用的部分”。

- 对照上一部分：F 与 $\star F$ 分别是 2-形式，$\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ 互换在形式上就是 $\star$；
- 规范不变性不是一条额外假设，而是 $\mathbf{d}^2 = 0$ 的推论；
- 同样地，下一张 PPT 会看到无源方程也是 $\mathbf{d}^2 = 0$ 的推论。

无源方程：$\mathbf{d}F = 0$

从 $F = \mathbf{d}A$ 立刻得到

$$\mathbf{d}F = \mathbf{d}^2 A = 0$$

分量形式

$\mathbf{d}F = 0$ 展开后给出

$$\nu = 0: \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nu = i: \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

- 反过来说（Poincaré 引理）：在单连通区域内 $\mathbf{d}F = 0 \Rightarrow$ 存在 A 使 $F = \mathbf{d}A$。“势存在”与“无源方程”是同一件事；
- 如果宇宙里有磁单极子，$\mathbf{d}F \neq 0$，A 就无法整体定义——这正是磁单极子的拓扑含义；
- 注意：这条方程里没有度规，是纯粹的几何陈述。

Outline

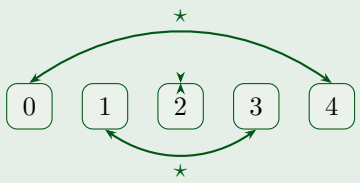
1. 从电动力学到相对论
2. 楔积与外微分
3. 电磁场张量与无源方程
4. **Hodge 对偶与有源方程**
5. 联络、曲率与 Einstein 方程
6. 总结

本部分主讲：洪子坤

Hodge 对偶：从 p-形式到 $(n-p)$-形式

$$(\star A)_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}} = \frac{1}{p!}\varepsilon^{\nu_1\cdots\nu_p}{}_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}} A_{\nu_1\cdots\nu_p}.$$

四维时空中的阶数对应



先用逆度规升起 ε 的前 p 个指标，再与 A 缩并。剩余的 $4-p$ 个反对称指标给出对偶形式的分量。

平直正交基底的对偶计算

取 $c=1$、号差 $(-+++)$，$\varepsilon_{0123}=+1$。

$$\varepsilon^{01}{}_{23} = \eta^{00}\eta^{11}\varepsilon_{0123} = -1,$$
$$\star(\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x) = -\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z;$$

$$\varepsilon^{23}{}_{01} = \eta^{22}\eta^{33}\varepsilon_{2301} = +1,$$
$$\star(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = \mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x.$$

第一组升起时间指标，带来一个负号；第二组只升起空间指标。

Hodge 对偶的基本性质与三维叉积

三条基本性质

线性与阶数互补

$$\star(aA+bB)=a\star A+b\star B.$$

连续两次对偶

$$\star^2 A=(-1)^{s+p(n-p)}A.$$

s 为度规的负方向数；四维闵氏时空中，二形式满足 $\star^2 F=-F$。

形式内积与体积元

$$A\wedge\star B=\langle A,B\rangle_g\,\mathrm{vol}_g.$$

其中 $\mathrm{vol}_g=\star 1$ 是体积元。

三维欧氏空间中的叉积

向量 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 对应一形式 $U=U_j\mathrm{d}x^j$、$V=V_k\mathrm{d}x^k$。取右手定向，则

$$\begin{aligned}\star(U\wedge V)&=U_jV_k\star(\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k)\\&=(\varepsilon_{ijk}U^jV^k)\mathrm{d}x^i\\&=(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})_i\mathrm{d}x^i.\end{aligned}$$

先作外积，再取对偶，得到叉积对应的一形式。

旋度与散度

$$\star\mathbf{d}U=(\nabla\times\boldsymbol{U})_i\mathrm{d}x^i,$$

$$\mathbf{d}\star U=(\nabla\cdot\boldsymbol{U})\,\mathrm{d}^3x.$$

对二形式 F，内积中的 $1/2$ 来自两个反对称指标的重复计数：

从形式内积到分量表达式

$$F \wedge \star F = \langle F, F \rangle_g \operatorname{vol}_g = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \operatorname{vol}_g,$$

$$\operatorname{vol}_g = \star 1 = \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4 x.$$

在平直正交坐标中，$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2)$。自由电磁场作用量因此写成

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{EM}} &= -\frac{1}{2\mu_0} \int F \wedge \star F \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4 x. \end{aligned}$$

Hodge 对偶用到升指标的逆度规和体积因子 $\sqrt{|g|}$，所以它依赖度规。

在平直正交坐标中，$F_{0i}=-E_i$、$F_{ij}=\varepsilon_{ijk}B^k$。六个分量可展开为

先把场强分成电场项与磁场项

$$\begin{aligned}F=&-\big(E_x\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y+E_z\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z\big)\\&+\big(B_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+B_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\big).\end{aligned}$$

逐项代入基底对偶关系，例如

$$\star(-E_x\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x)=E_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\qquad\star(B_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)=B_x\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x.$$

电场项变成空间面积项，磁场项变成含时项

$$\begin{aligned}\star F=&B_x\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x+B_y\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y+B_z\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z\\&+E_x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+E_y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+E_z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

与 F 比较：$F\to\star F$ 对应 $\boldsymbol{E}\to-\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{E}$。

有源方程：比较 $\mathbf{d}\star F$ 与 $\mu_0\star J$

左边：对 $\star F$ 求外微分

纯空间项只来自电场的空间导数：

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\star F)\big|_{xyz} &= (\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z)\mathrm{d}^3x \\ &= (\nabla\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}^3x.\end{aligned}$$

磁场项本身含 $\mathrm{d}t$，求导后不会产生纯空间项。

含时项以 $\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 为例：

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\star F)\big|_{tyz} &= \big(\partial_t E_x + \partial_z B_y - \partial_y B_z\big)\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\ &= \big[\partial_t E_x - (\nabla\times\boldsymbol{B})_x\big]\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

右边：电流一形式的对偶

$$J = -\rho\,\mathrm{d}t + J_i\mathrm{d}x^i.$$

由 $\star\mathrm{d}t = -\mathrm{d}^3x$ 和 $\star\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$，得到

$$\begin{aligned}\star J = \rho\,\mathrm{d}^3x &\\ - J_x\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z &\\ - J_y\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x &\\ - J_z\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.&\end{aligned}$$

两边同一基底的系数相等，分别得到

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \mu_0\rho,} \qquad \boxed{\nabla\times\boldsymbol{B} - \partial_t\boldsymbol{E} = \mu_0\boldsymbol{J}.}$$

对 $\mathbf{d}\star F=\mu_0\star J$ 两边再取一次外微分：

$$0=\mathbf{d}^2\star F=\mu_0\mathbf{d}\star J \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{d}\star J=0.$$

在平直笛卡尔坐标中展开

$$\star J=\frac{1}{3!}J^\mu\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\star J&=\frac{1}{3!}(\partial_\alpha J^\mu)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{d}x^\alpha\wedge\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\sigma\\&=(\partial_\mu J^\mu)\mathrm{d}^4x.\end{aligned}$$

四个不同的基一形式才能组成非零体积元。ν,ρ,σ 已占三个方向，只有 $\alpha=\mu$ 的项保留下来。

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu=\partial_t\rho+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0.}$$

Levi-Civita 张量包含度规行列式：

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{|g|}\,[\mu\nu\rho\sigma], \qquad \mathrm{vol}_g = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}^4x.$$

求导时保留 $\sqrt{|g|}$

$$\mathbf{d}\star J = \partial_\mu\big(\sqrt{|g|}\,J^\mu\big)\mathrm{d}^4x,$$

$$\mathbf{d}\star J = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}\,J^\mu\big) = \nabla_\mu J^\mu = 0.$$

同理，有源 Maxwell 方程的分量形式为

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}\,F^{\nu\mu}\big) = \nabla_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu.}$$

这些表达式适用于平直时空的曲线坐标，也适用于弯曲时空；形式方程仍是 $\mathbf{d}\star F = \mu_0 \star J$。

	微分形式	平直笛卡尔坐标中的分量
势与场强	$F = \mathbf{d}A$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
齐次方程	$\mathbf{d}F = 0$	$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$
有源方程	$\mathbf{d} \star F = \mu_0 \star J$	$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu$
电荷守恒	$\mathbf{d} \star J = 0$	$\partial_\mu J^\mu = 0$
规范变换	$A \to A + \mathbf{d}\lambda$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$

在等时三维区域 V 上积分，利用 Stokes 定理得到高斯定律：

$$\int_V \mathbf{d} \star F = \oint_{\partial V} \star F = \mu_0 \int_V \star J \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mu_0 \int_V \rho \, \mathrm{d}^3 x.$$

由 $\mathbf{d}F = 0$ 的含时分量得到 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$，再对固定曲面 S 用 Stokes 定理：

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Outline

1. 从电动力学到相对论

2. 楔积与外微分

3. 电磁场张量与无源方程

4. Hodge 对偶与有源方程

5. 联络、曲率与 Einstein 方程

6. 总结

本部分主讲：周文斌

从 $U(1)$ 联络到引力联络

电磁场：阿贝尔联络

$$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu, \qquad F = \mathbf{d}A$$

局部规范变换与场强：

$$A \to A + \mathbf{d}\lambda, \qquad F \to F$$

规范群是阿贝尔群 $U(1)$。

引力场：局部 Lorentz 联络

$$e^a = e^a{}_\mu \mathrm{d}x^\mu, \qquad \omega^a{}_b = \omega^a{}_{b\mu} \mathrm{d}x^\mu$$

度规由标架给出：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$$

关键的替换

电磁联络 A 与引力联络 $\omega^a{}_b$ 是同类对象；度规 $g_{\mu\nu}$ 不是规范势，它描述长度与因果结构。

GR 中的联络

无挠、度规相容的 Levi-Civita 联络满足

$$T^a = \mathbf{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0, \qquad De^a = 0.$$

因此 $\omega^a{}_b$ 由标架完全确定，就像 Christoffel 联络由度规确定。

$\omega^a{}_b$ 不是额外的独立场：同一套联络语言，只是规范群换成了局部 Lorentz 群。

曲率二形式：从 $F = \mathbf{d}A$ 到 $\mathcal{R} = \mathbf{d}\omega + \omega \wedge \omega$

$$\mathcal{R}^a{}_b = \mathbf{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \tfrac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

曲率是联络的外微分，但多出一项二次自相互作用

- $\mathbf{d}\omega$ 对应 Maxwell 的 $\mathbf{d}A$；
- $\omega \wedge \omega$ 来自非阿贝尔规范群；
- $R^a{}_{b\mu\nu}$ 正是用局部标架写出的 Riemann 张量。

几何意义

沿闭合回路平行移动一个标架，返回后会相差一个局部 Lorentz 变换。

该变换的无穷小生成元就是 $\mathcal{R}^a{}_b$，其分量给出和乐与潮汐曲率。

与电磁场的第一个差别

$F = \mathbf{d}A$ 对 A 线性；

$\mathcal{R} = \mathbf{d}\omega + \omega \wedge \omega$ 对 ω 非线性。

曲率二形式的 Bianchi 恒等式

$$D\mathcal{R}^a{}_b = \mathbf{d}\mathcal{R}^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \mathcal{R}^c{}_b - \mathcal{R}^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0$$

写成张量形式就是 $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$。缩并两次，得到缩并 Bianchi 恒等式：

$$\nabla^\mu \big(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} \big) = 0$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu}, \qquad \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

Einstein 张量：自动守恒的对称二阶张量

- 为什么这件事重要？因为物质那边有

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

（能量动量守恒，由物质作用量的微分同胚不变性给出）；
- 两边要相等，左边就必须自动无散度；Bianchi 恒等式正好保证了这一点；
- 表述要准确：$D\mathcal{R} = 0$ 依赖事先选定的联络；它不需要额外的度规相容条件，但不能说“任意流形上”都已有曲率。

Einstein 方程：动力学给出度规（Carroll 4.2 节）

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

爱因斯坦场方程

- 左边是曲率的无迹组合，右边是物质的能量动量张量；
- 系数由牛顿极限确定为 $8\pi G/c^4$；
- 方程关于 $g_{\mu\nu}$ 非线性，这来自 $\mathcal{R}$ 中的 $\omega \wedge \omega$。

与 Maxwell 方程的分工

恒等式： $\mathbf{d}F = 0, \qquad D\mathcal{R} = 0$

动力学： $\mathbf{d} \star F = \mu_0 \star J, \qquad G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$

弯曲时空中 $\mathbf{d}F = 0$ 不变；
有源方程只需把 $\star$ 中 Minkowski 度规换成 $g_{\mu\nu}$。

同一套形式语言，不同的物理

	电磁场（Maxwell）	引力场（Einstein）
规范群	阿贝尔群 $U(1)$	局部 Lorentz 群 $SO(1,3)$
联络	$A = A_\mu \mathrm{d}x^\mu$	$\omega^a{}_b = \omega^a{}_{b\mu}\mathrm{d}x^\mu$
曲率	$F = \mathbf{d}A$	$\mathcal{R}^a{}_b = \mathbf{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$
恒等式	$\mathbf{d}F = 0$	$D\mathcal{R}^a{}_b = 0$
动力学	$\mathbf{d} \star F = \mu_0 \star J$	$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$

两类物理不能混为一谈

$g_{\mu\nu}$ 是度规，不是与 A_μ 同阶的规范势；真正的对应是 $A_\mu \leftrightarrow \omega^a{}_{b\mu}$。电磁曲率对联络线性，引力曲率与场方程都非线性。

Outline

1. 从电动力学到相对论
2. 楔积与外微分
3. 电磁场张量与无源方程
4. Hodge 对偶与有源方程
5. 联络、曲率与 Einstein 方程
6. 总结

本部分主讲：周文斌

Summary

1. 微分形式把“反对称”变成楔积 $\wedge$、把“求导”变成外微分 d，而 $\mathrm{d}^2 = 0$ 一口气给出规范不变性、无源方程与电荷守恒；

2. Hodge 对偶 $\star$ 统一了 $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ 对偶、叉积与体积元，代价是它必须依赖度规；

3. 引力场也是“联络 $\to$ 曲率 $\to$ 恒等式 $+$ 场方程”的结构；规范群与非线性来自不同的物理。

微分形式提供共同语法；规范群、动力学和物理诠释仍由具体理论决定。

主要参考：Sean Carroll, *Spacetime and Geometry*

Sec. 1.8	Maxwell's Equations（$F_{\mu\nu}$、$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$、对偶张量）
Sec. 2.9	**Differential Forms**（p-形式、楔积 $\wedge$、外微分 $\mathbf{d}$）
Sec. 2.10	**Integration**（Hodge 对偶 $\star$、Stokes 定理、形式的 Maxwell 方程）
Sec. 3.6–3.7	The Riemann Curvature Tensor；Properties（Ricci、Einstein、Bianchi）
Sec. 4.2	Einstein's Equation

章节对应说明

上述微分形式与 Hodge 对偶的完整讨论，在 教材版中位于第 2.9–2.10 节；在作者的 *Lecture Notes on General Relativity*（arXiv:gr-qc/9712019）中，则收于第 1 章末的“electromagnetism → differential forms → Hodge duality”一节。两处内容一致，仅编排次序不同。

谢谢大家！

周文斌 · 洪子坤 · 张悦水

欢迎批评与提问