LX 一维与二维振动驻波实验

实验者: 周文斌 (　　)　陈敖宇 (　　)　指导老师: 陈文杰
中山大学物理学院，陆祐堂

摘　要: 本实验系统开展了一维与二维弹性体振动驻波的实验研究，分为 LX1 一维振动驻波和 LX2 二维圆形薄板振动驻波两大部分。在 LX1 部分，完成了弹性绳横振动、不锈钢薄金属条小振动和细钢丝圆环振动实验，测量了弦振动波速、金属材料杨氏模量等关键参数并与理论值对比。实验测得弦振动波速为 (25.78 ± 0.04) m/s，相对误差 2.68%；不锈钢薄金属条杨氏模量平均值为 173.9 GPa，与理论值偏差约 10.8%；细钢丝圆环杨氏模量平均值为 175 GPa，实验结果验证了一维振动理论的正确性。在 LX2 部分，观测了 5 种不同振动模式的克拉尼图形，利用数值模拟方法计算了本征值 k、波节位置和驻波分布图并与实验结果对比。实验测得黄铜板平均常数 $\bar{c} = 1.07\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，杨氏模量为 104.5 GPa，处于铜的标准范围内；波节位置测量平均相对误差约 3.0%，径向波速实验值与理论值平均相对误差约 3.8%。实验结果完整验证了圆形薄板自由振动理论和克拉尼定律，掌握了振动实验基本方法和数值模拟技术，达到了实验目的。

关键词： 一维振动；二维驻波；克拉尼图形；杨氏模量；数值模拟

Abstract: This experiment systematically studied the vibration standing waves of one-dimensional and two-dimensional elastic bodies, divided into two core parts: LX1 one-dimensional vibration standing wave and LX2 two-dimensional circular thin plate vibration standing wave. In the LX1 part, experiments on transverse vibration of elastic rope, small vibration of stainless steel thin metal strip and vibration of fine steel wire ring were completed. Key parameters such as wave velocity of string vibration and Young's modulus of metal materials were measured and compared with theoretical values. The experimental measured wave velocity of string vibration is (25.78 ± 0.04) m/s with a relative error of 2.68%; the average Young's modulus of stainless steel thin metal strip is 173.9 GPa, with a deviation of about 10.8% from the theoretical value; the average Young's modulus of fine steel wire ring is 175 GPa. The experimental results verify the correctness of one-dimensional vibration theory. In the LX2 part, Chladni patterns of 5 different vibration modes were observed. The eigenvalue k, nodal line positions and standing wave distribution maps were calculated by numerical simulation and compared with experimental results. The experimental measured average constant $\bar{c}$ of brass plate is $1.07\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, and the Young's modulus is 104.5 GPa, which is within the standard range of copper; the average relative error of nodal line position measurement is about 3.0%, and the average relative error between experimental and theoretical values of radial wave velocity is about 3.8%. The experimental results fully verify the free vibration theory of circular thin plates and Chladni's law, master the basic methods of vibration experiments and numerical simulation technology, and achieve the experimental objectives.

Keywords: One-dimensional vibration; Two-dimensional standing wave; Chladni pattern; Young's modulus; Numerical simulation

1 引言

振动与波是物理学的基础而重要的教学内容，相关知识贯穿物理学各个领域，在理论研究和工程应用中均具有重要意义。从空间站失重环境下的物体质量测量，到桥梁建筑的结构振动分析；从超声检测技术的工业应用，到光学谐振腔的设计优化，振动与波的原理无处不在。基于傅里叶变换原理，任何复杂的振动都可以分解为多个简谐振动的叠加，因此深刻认识简谐振动与驻波的特性，是学习更复杂振动理论的基础。

一维振动是振动理论的基础，包括弦的横振动、杆的纵振动与横振动、圆环的振动等多种形式。其中，弦振动是最简单的一维波动问题，其波动方程为二阶线性偏微分方程，求解过程直观清晰；金属杆的横振动则为四阶偏微分方程，边界条件更为复杂，其泛音频率不成谐波关系，与弦振动形成鲜明对比；金属圆环的振动则结合了杆振动与周期性边界条件的特点，具有独特的振动模式。

二维振动驻波，特别是圆形薄板的振动，因其复杂的边界条件和丰富的振动模式，成为振动理论研究的重要对象。1787 年，德国物理学家克拉尼首次发现，当撒有细沙的金属薄板发生共振时，细沙会聚集在振动的波节线上，形成美丽的对称图案，即著名的克拉尼图形。克拉尼图形不仅直观展示了二维驻波的分布规律，还在乐器设计、航空航天结构振动分析、微机电系统 (MEMS) 设计等领域具有重要应用价值。由于二维薄板振动方程求解的复杂性，数值模拟方法成为研究二维振动的重要手段，通过将理论计算与实验观测相结合，可以更深入地理解二维振动的物理本质。

本实验分为 LX1 与 LX2 两个核心部分：LX1 研究一维弹性绳、不锈钢薄金属条及细钢丝圆环的横振动驻波现象，测量波速、杨氏模量等参数，验证一维振动理论；LX2 研究圆形薄黄铜板的二维振动驻波，观测不同频率下的克拉尼图形，对比实验结果与数值模拟，验证二维薄板振动理论。通过本实验，系统掌握振动方程的推导与求解方法，学习振动实验装置的搭建与调试技术，培养理论分析、数值模拟与实验验证相结合的科学研究能力。

2 实验目的

本实验分为一维振动驻波与二维圆形薄板振动驻波两大部分，核心实验目的如下：

1. 熟悉一维波动方程与二维薄板振动方程的推导和求解过程，掌握不同边界条件下的本征振动特性；
2. 研究弹性绳的横振动驻波现象，测量弦振动的波速，验证波速与张力、线密度的关系；
3. 研究不锈钢薄金属条及细钢丝圆环的小振动驻波现象，测量材料的杨氏模量，对比理论值与实验值；
4. 观测多种频率下圆形薄黄铜板的二维驻波分布（克拉尼图形），分析振动模式与频率的关系；
5. 掌握数值模拟方法绘制振动驻波分布图，对比实验现象与模拟结果，验证振动理论；
6. 学习振动实验装置的搭建与调试方法，掌握频率、波长等振动参数的测量技术。

3 仪器用具

1. PASCO 振动发生器和振动驱动器；
2. 弹性绳、不锈钢薄金属长条（6 种不同长度）、细钢丝金属圆环；
3. 圆形薄黄铜板（半径≈120mm，半厚度≈0.50mm），焊有细导线的压电陶瓷蜂鸣片；
4. 钢卷尺、钢直尺、电子天平、电子拉力计、螺旋测微器（或游标卡尺）；
5. 功率正弦波信号发生器和示波器；
6. 薄双面胶、细沙、撒沙器、支撑杆、多孔厚板、接沙子的金属盘；
7. 实验测控用计算机 1 台（用于数值模拟）。

4 实验原理

振动与波是物理学的基础内容，贯穿力学、声学、光学等多个领域。本实验系统研究一维弦、杆、环和二维圆形薄板的振动驻波现象，通过理论推导、数值模拟与实验观测相结合的方法，深入理解不同维度弹性体的振动规律。

4.1 LX1 一维振动驻波原理

4.1.1 一维均匀柔软弦的横向小振动

弦振动线元受力分析与方程建立 考虑一根完全柔软、质量均匀分布的弦，平衡时沿 x 轴绷紧。取坐标 x 标志弦上各点，$u(x,t)$ 表示 x 点在 t 时刻沿垂直于 x 方向的横向位移。取长度为 Δx 的微元段进行受力分析，设弦的质量线密度为 ρ，x 点和 $x+\Delta x$ 点的张力分别为 T_1 和 T_2，与水平方向的夹角分别为 θ_1 和 θ_2。

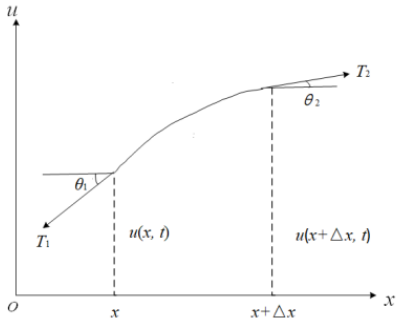


图 1: 弦横振动时一小段弦的受力示意图

对于小振动近似，$\theta \ll 1$，因此有 $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$，$\cos\theta \approx 1$。微元段在水平方向受力平衡：

$$T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_1 = 0$$

代入小振动近似得 $T_1 = T_2 = T$，即弦中张力处处相等。在竖直方向，根据牛顿第二定律：

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1$$

将 $\sin\theta \approx \frac{\partial u}{\partial x}$ 代入，右边可写为：

$$T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

两边消去 Δx 并令 $\Delta x \to 0$，得到弦的横振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

其中波速 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$，与弦的张力平方根成正比，与质量线密度平方根成反比。

弦振动定解问题的建立与求解 考虑左端 $(x=0)$ 固定、右端 $(x=l)$ 接简谐振源的弦，振源位移为 $A\sin\omega t$，初

始位移和初始速度均为零。该问题的定解条件为：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = A\sin\omega t, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

由于边界条件非齐次，采用边界条件齐次化方法，令：

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l} A\sin\omega t$$

代入原方程得到 $v(x,t)$ 满足的齐次边界条件非齐次方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\omega^2 A x}{l}\sin\omega t \\ v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = -\frac{\omega A x}{l} \end{cases}$$

采用本征函数展开法求解，将 $v(x,t)$ 展开为齐次方程本征函数的级数：

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入方程得到关于 $T_n(t)$ 的常微分方程初值问题，求解后得到通解。

共振特性与驻波形成机制 当振源频率 ω 等于弦的本征频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）时，解中出现正比于时间 t 的项：

$$\lim_{\omega\to\omega_n} u(x,t) \overset{t\to\infty}{\to} (-1)^n \frac{atA}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\omega_n t$$

此时振幅随时间线性增长，发生共振，形成稳定的驻波。驻波的波节位置满足 $\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$，即 $x = \frac{kl}{n}$（$k = 0, 1, \cdots, n$），共 $n+1$ 个波节；波腹位置在相邻波节中间，共 n 个波腹。

值得注意的是，共振时作为振源的右端点 $(x = l)$ 表现为波节而非波腹，这是因为入射波与反射波在该点干涉相消。

实验测量原理 实验中通过电子拉力计测量弦的张力 T，电子天平测量弦的质量 m，钢卷尺测量弦的长度 l，计算质量线密度 $\rho = \frac{m}{l}$，代入波速公式得到理论值：

$$a_{\text{理论}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

同时，通过观察驻波波形，数出波腹个数 n，计算波长 $\lambda = \frac{2l}{n}$，结合共振频率 f，得到实验波速：

$$a_{\text{实验}} = \lambda f = \frac{2lf}{n}$$

通过比较理论值与实验值，验证弦振动理论。

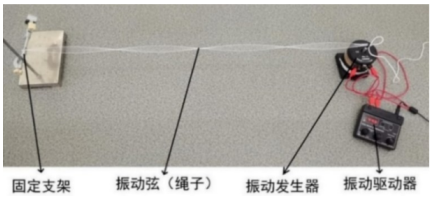


图 2: 一维弦横振动的实验装置图

4.1.2 金属薄杆的横向小振动

挠矩与曲率的关系推导 取薄杆静止时的中线为 x 轴，横向位移 $u(x)$ 向上为正。当杆发生弯曲时，中线长度不变，中线一侧伸长，另一侧压缩，产生抵抗弯曲的挠矩（弯矩）M。

考虑距离中线 y 处的一薄层，厚度为 dy，宽度为 b。弯曲后该薄层的相对伸长为 $\frac{y}{R}$，其中 R 为中线的曲率半径。根据胡克定律，该薄层的张应力为 $\sigma = Y\frac{y}{R}$，张力为：

$$dG = \sigma \cdot b dy = \frac{Yby}{R} dy$$

该张力对中线的力矩为 ydG，积分得到整个截面上的挠矩：

$$M = \int_{-d/2}^{d/2} ydG = \frac{Y}{R}\int_{-d/2}^{d/2} by^2 dy = \frac{YI}{R}$$

其中 $I = \int_{-d/2}^{d/2} by^2 dy = \frac{bd^3}{12}$ 为截面的转动惯量，d 为杆的厚度。对于小弯曲，曲率 $\frac{1}{R} \approx -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$（负号表示向上弯曲时 $u_{xx} < 0$），因此：

$$M = -YI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

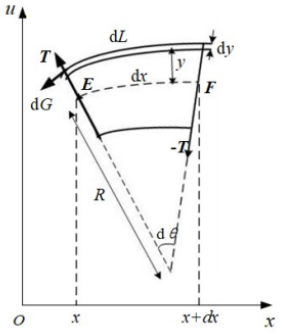


图 3: 杆的一小段示意图

杆振动方程的建立 考虑长度为 dx 的微元段，两端的挠矩分别为 $M|_x$ 和 $M|_{x+dx}$，切力分别为 $T|_x$ 和 $T|_{x+dx}$。根

据力矩平衡：

$$M|_x - M|_{x+dx} - Tdx = 0$$

整理得切力与挠矩的关系：

$$T = -\frac{\partial M}{\partial x} = YI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

在竖直方向，根据牛顿第二定律：

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T|_x - T|_{x+dx} = -\frac{\partial T}{\partial x}dx$$

代入切力表达式，得到金属薄杆的横振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{3}$$

其中 $a^2 = \frac{YI}{\rho S}$，ρ 为质量体密度，$S = bd$ 为横截面积。

一端固支一端自由杆的边界条件与求解 实验中金属杆一端固定在振动发生器上（固支端），另一端自由。固支端 $(x = 0)$ 的位移和转角均为零：

$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

自由端 $(x = l)$ 的弯矩和切力均为零：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(l,t) = 0$$

设简谐振动解为 $u(x,t) = X(x)e^{-i\omega t}$，代入方程得：

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - k^4 X = 0$$

其中 $k^4 = \frac{\omega^2 \rho S}{YI}$。采用特征根法求解，特征根为 $\lambda = \pm k, \pm ik$，因此通解为：

$$X(x) = A\mathrm{ch}(kx) + B\mathrm{sh}(kx) + C\cos(kx) + D\sin(kx)$$

代入固支端边界条件得 $C = -A$，$D = -B$，因此：

$$X(x) = A[\mathrm{ch}(kx) - \cos(kx)] + B[\mathrm{sh}(kx) - \sin(kx)]$$

代入自由端边界条件，得到关于 A 和 B 的齐次线性方程组。方程组有非零解的条件是系数行列式为零，由此得到本征值方程：

$$\mathrm{ch}(kl)\cdot\cos(kl) = -1 \tag{4}$$

本征频率与振形特性 本征值方程 (4) 为超越方程，需数值求解。前几个本征值为：

$$k_1 l = 1.8751,\ k_2 l = 4.6941,\ k_3 l = 7.8548,\ k_4 l = 10.9955,\ \cdots$$

对应的本征频率为：

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi}\sqrt{\frac{YI}{\rho S}} = \frac{\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{YI}{\rho S}}\cdot\beta_n^2$$

其中 $\beta_n = \frac{k_n l}{\pi}$。当 $n > 2$ 时，$\beta_n \approx n - \frac{1}{2}$，即本征频率近似满足 $f_n \propto (n - \frac{1}{2})^2$。

基频（最低共振频率）为：

$$f_1 = \frac{0.55966}{l^2}\sqrt{\frac{YI}{\rho S}}$$

高阶泛音频率与基频不成谐波关系，例如 $f_2 = 6.267 f_1$，$f_3 = 17.548 f_1$，$f_4 = 34.387 f_1$。

实验测量原理 实验中测量金属杆的长度 l、宽度 b、厚度 d 和质量 m，计算密度 $\rho = \frac{m}{bdl}$、横截面积 $S = bd$ 和转动惯量 $I = \frac{bd^3}{12}$。调节振动频率至共振，记录共振频率 f_n，代入公式计算杨氏模量：

$$Y = \frac{4\pi^2 f_n^2 \rho S l^4}{(k_n l)^4 I}$$

对于不锈钢，杨氏模量的参考值为 193∼195 GPa。同时测量共振时波节的位置坐标，与理论计算值进行比较。



图 4: 薄金属长条片的共振实验图

4.1.3 细钢丝金属圆环的小振动

圆环振动的基本方程 细钢丝金属圆环可看作是弯曲成圆形的细杆，其振动方程与直杆相同，但满足周期性边界条件：

$$u(\theta + 2\pi) = u(\theta)$$

其中 θ 为圆环上的角坐标。对于半径为 R 的圆环，截面半径为 r，截面转动惯量 $I = \frac{\pi}{4}r^4$，横截面积 $S = \pi r^2$，回转

半径 $\kappa = \frac{r}{2}$。

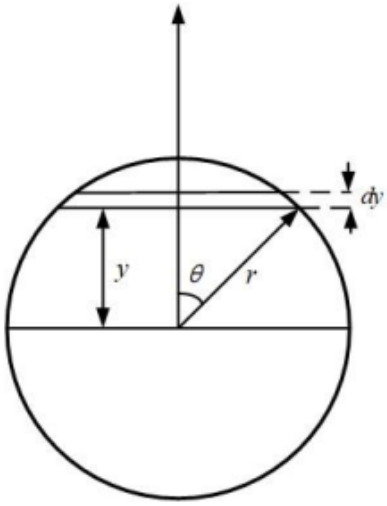


图 5: 细钢丝横截面坐标选取

本征频率与共振特性 当圆环共振时有 n 个波腹时，共振波长 $\lambda = \frac{4\pi R}{n}$。代入杆振动的波速公式 $v = \sqrt{a\omega} = \lambda f$，可得杨氏模量计算公式：

$$Y = f^2 \cdot \frac{1}{n^4} \times 15.933 \text{ (GPa)}$$

对于偶数波腹数（$n = 2, 4$），由于圆环的对称性，可能会观察到两个不同的共振频率。这是因为振源位置的不同会导致等效杆长发生变化，从而产生不同的共振频率。实验中应选取数值较大的那个频率进行计算。



图 6: 细钢丝圆环共振的实验图

4.2 LX2 二维圆形薄板振动驻波原理

4.2.1 圆形薄板小振动的变分原理

当圆形薄板以频率 ω 作简谐振动时，任一点 (r, θ) 的竖向位移（挠度）为 $\eta(r, \theta, t) = Z(r, \theta)e^{\pm i\omega t}$，其中 $Z(r, \theta)$ 为振形函数。

根据瑞利-里兹变分法，薄板振动的最大形变势能 U_{Max} 和最大动能 K_{Max} 分别为：

$$U_{\text{Max}} = \frac{E}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 Z)^2 - 2(1-s) \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r\, dr d\theta$$

$$K_{\text{Max}} = \omega^2 \iint \rho h Z^2 r dr d\theta$$

其中 E 为抗挠刚度，ρ 为质量体密度，h 为薄板半厚度，s 为泊松比（黄铜 $s = 0.324$）。

由能量守恒定理，当振形函数 $Z(r, \theta)$ 满足边界条件时，有 $\delta(U_{\text{Max}} - K_{\text{Max}}) = 0$，由此可导出薄板振动的控制方程。

4.2.2 薄板振动控制方程的导出

对变分方程进行变分运算，得到薄板小振动的控制方程：

$$\nabla^4 \eta + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

其中 $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ 为双调和算子，常数 c 满足：

$$\frac{1}{c^2} = \frac{3\rho(1-s^2)}{Yh^2}$$

在极坐标系下，拉普拉斯算子为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

将 $\eta = Z(r, \theta)e^{-i\omega t}$ 代入方程 (5)，得到：

$$(\nabla^2 - \gamma^2)(\nabla^2 + \gamma^2) Z = 0$$

其中 $\gamma^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$。该方程可拆分为两个亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 Z + \gamma^2 Z = 0, \quad \nabla^2 Z - \gamma^2 Z = 0$$

分别求解后线性组合得到通解。

4.2.3 自由边界条件的详细推导

实验中圆形薄板支撑在圆心附近，边界悬空，重力可忽略。在自由边界 $r = a$ 处，弯曲力矩 M_r、扭转力矩 $M_{r\theta}$ 及竖向剪力 Q_r 均为零。

弯曲力矩和扭转力矩的表达式为：

$$M_r = -E\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + s\left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2}\right)\right]$$

$$M_{r\theta} = -E(1-s)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)$$

竖向剪力的表达式为：

$$Q_r = -E\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 Z)$$

由于连续分布的扭矩在静力上等效于附加剪力 $\frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta}$，因此自由边界条件为：

$$M_r|_{r=a} = 0 \tag{6}$$

$$\left(Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta}\right)\Big|_{r=a} = 0 \tag{7}$$

4.2.4 分离变量法求解本征值问题

采用分离变量法，令 $Z(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta)$，代入亥姆霍兹方程得角向方程：

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} + m^2\Phi = 0$$

其解为 $\Phi(\theta) = C\cos m\theta + D\sin m\theta$，其中 $m = 0, 1, 2, \cdots$ 为角向模数，满足周期性边界条件 $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$。

径向方程的解为：

$$R(r) = AJ_m(kr) + BI_m(kr)$$

其中 $J_m(x)$ 为 m 阶第一类贝塞尔函数，$I_m(x)$ 为 m 阶变形贝塞尔函数，满足 $I_m(x) = i^{-m}J_m(ix)$。

将通解代入边界条件 (6) 和 (7)，得到关于 A 和 B 的齐次线性方程组。方程组有非零解的条件是系数行列式为零，由此得到本征值方程。数值求解该方程，得到本征值 $k_{mn}a = x_{mn}$，其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 为径向模数。

4.2.5 本征频率与克拉尼图形

本征频率与本征值的关系为：

$$f_{mn} = \frac{\pi c}{2a^2}\cdot\beta_{mn}^2$$

其中 $\beta_{mn} = \frac{x_{mn}}{\pi}$。当 $n \to \infty$ 时，$\beta_{mn} \to n + \frac{m}{2}$，即：

$$f_{mn} \propto \left(n + \frac{m}{2}\right)^2$$

这就是著名的克拉尼定律。

振形函数 $Z_{mn}(r,\theta) = 0$ 的解对应驻波的波节线：- 当 $m = 0$ 时，振形与 θ 无关，波节线为同心圆，对应中心对称的克拉尼图形，圆形波节线的数量为 n；- 当 $m \neq 0$ 时，波节线包括 n 条同心圆和 $2m$ 条径向直线，对应具有 m 次旋转对称性的克拉尼图形。



图 7: 频率为 10.197kHz 时的二维实测克拉尼图形 (m=5,n=7)

4.2.6 数值模拟方法

利用 Mathematica 或 Matlab 软件，可数值求解本征值方程，得到不同 (m,n) 对应的本征值 x_{mn}，进而计算振形函数 $Z_{mn}(r,\theta)$。通过绘制 $Z_{mn}(r,\theta)$ 的等高线图，可得到二维驻波分布图，与实验观测到的克拉尼图形进行对比。

4.2.7 支撑点与振源位置的影响

当支撑点不在圆心而在点 $P(b,0)$ 时，薄板振动的对称性被破坏，可激发 $m \neq 0$ 的振动模式。利用格林函数方法，可求解点源激励下的稳态振动。格林函数 G 满足方程：

$$\nabla^4 G - \gamma^4 G = \frac{1}{r}\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)$$

将格林函数按本征函数 $Z_{mn}(r,\theta)$ 展开，可得：

$$G_\omega(r,\theta|r_0,\theta_0) = \frac{1}{\pi a^2}\sum_{m,n}\frac{Z_{mn}(r,\theta)Z_{mn}(r_0,\theta_0)}{\Lambda_{mn}(k_{mn}^4 - \gamma^4)}$$

当 $\gamma = k_{mn}$ 时，发生共振，驻波波节线仍由 $Z_{mn}(r,\theta) = 0$ 给出。

5 实验内容与步骤

5.1 实验前准备与仪器校准

1. 仔细阅读 LX1 和 LX2 实验讲义，熟悉一维和二维弹性体振动的基本原理、实验方法和注意事项；

2. 检查实验仪器是否齐全完好，包括：振动发生器和驱动器、功率正弦波信号发生器、示波器、电子天平、电子拉力计、螺旋测微器、钢直尺、钢卷尺、弹性绳、不

锈钢薄金属长条、细钢丝圆环、圆形黄铜板、压电陶瓷蜂鸣片、细沙、撒沙器等；

3. 准备好实验记录表格、绘图工具和计算器；

4. 打开计算机，熟悉 Mathematica 或 Matlab 软件的基本操作，准备用于数值模拟和数据处理的程序。

5.2 LX1 一维振动驻波实验操作流程

5.2.1 弹性绳横振动实验

1. 搭建实验装置：将弹性绳一端固定在支架上，另一端连接振动发生器的振动头，调整支架高度使绳子水平；将电子拉力计串联在绳子与支架之间，用于测量绳子的张力；

2. 测量弹性绳的基本参数：用电子天平称出弹性绳的总质量 M，用钢卷尺量出总长度 L；

3. 调节绳子张力：拉伸绳子至长度 l，记录此时电子拉力计的读数 T；计算该段绳子的质量 $m = M \cdot \frac{l}{L}$ 和质量线密度 $\rho = \frac{m}{l}$；

4. 调节振动驱动器：打开振动驱动器电源，将振幅调节旋钮逆时针转到底（振幅为零），然后缓慢顺时针旋转至适当幅度；

5. 寻找共振频率：从低到高缓慢调节频率旋钮，观察绳子的振动情况。当绳子出现明显的驻波波形（波节和波腹清晰稳定）时，微调频率至波形最清晰，记录此时的共振频率 f 和波腹个数 n；

6. 改变张力：调节绳子的长度和张力，重复步骤 3-5，测量至少 5 组不同张力下的共振频率和波腹个数；

7. 数据处理：对于每组数据，计算波长 $\lambda = \frac{2l}{n}$ 和实验波速 $a_{\text{实验}} = \lambda f$，并与理论波速 $a_{\text{理论}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 进行比较，计算相对误差；

8. 拍摄典型的驻波图，记录实验现象和异常情况。

5.2.2 不锈钢薄金属长条小振动实验

1. 测量金属长条的基本参数：用螺旋测微器在不同位置测量金属长条的宽度 b 和厚度 d，各测量 5 次取平均值；用钢直尺测量金属长条的长度 l；用电子天平称出质量 m；计算密度 $\rho = \frac{m}{bdl}$、横截面积 $S = bd$ 和转动惯量 $I = \frac{bd^3}{12}$；

2. 安装金属长条：将金属长条的一端牢固地固定在振动发生器的夹具上，确保另一端自由，且长条保持水平；

3. 调节振动驱动器：打开电源，将振幅调节至适当大小；

4. 测量基频：从低到高缓慢扫描频率，当观察到金属长条出现约半个共振波包（只有一个波腹在自由端）时，微调频率至振幅最大，记录基频 f_1；

5. 测量泛音频率：继续升高频率，当观察到约一个半共振波包时，记录第一泛音频率 f_2；当观察到约两个半共振波包时，记录第二泛音频率 f_3；

6. 测量不同长度的共振频率：更换 6 种不同长度的金属长条（如 13.2cm、12.2cm、11.2cm、9.2cm、8.2cm、7.2cm），重复步骤 4-5，测量每种长度的 f_1 和 f_2；对于 13.2cm 和 12.2cm 的长条，额外测量 f_3；

7. 测量波节位置：对于每种共振模式，用钢直尺测量波节所在位置的坐标，记录至少 3 个波节的位置；

8. 数据处理：根据测量的共振频率，代入公式计算杨氏模量 Y，与参考值（193∼195 GPa）进行比较，计算相对误差；将实验测量的波节位置与理论计算值进行对比；

9. 拍摄典型的共振波形图，记录实验现象。

5.2.3 细钢丝金属圆环小振动实验

1. 测量圆环的基本参数：用螺旋测微器在不同位置测量细钢丝的直径 $2r$，测量 5 次取平均值；用钢卷尺测量细钢丝的总长度 L（包括固定处重叠的部分）和圆环的半径 R；用电子天平称出质量 m；计算密度 $\rho = \frac{m}{\pi r^2 L}$；

2. 安装圆环：将圆环的一点牢固地固定在振动发生器的夹具上，确保固定点不影响圆环的自由振动；

3. 调节振动驱动器：打开电源，将振幅调节至适当大小；

4. 寻找共振频率：从低到高缓慢扫描频率，观察圆环的振动情况。当圆环出现清晰的驻波波形时，记录共振频率 f 和波腹个数 n；

5. 注意事项：对于 $n = 2$ 和 $n = 4$ 的情况，仔细观察是否存在两个不同的共振频率，记录数值较大的那个频率；

6. 重复测量：测量波腹数 $n = 2, 3, 4, 5, 6$ 时的共振频率，每个频率测量 3 次取平均值；

7. 数据处理：代入公式计算杨氏模量 Y，与参考值（HT200 细钢丝约 135 GPa）进行比较，计算相对误差；

8. 拍摄典型的圆环驻波图，记录实验现象。

5.3 LX2 二维圆形薄板振动驻波实验操作流程

1. 测量圆形黄铜板的基本参数：用螺旋测微器在不同位置测量黄铜板的厚度 $2h$，测量 5 次取平均值；用钢直尺测量黄铜板的半径 a；用电子天平称出质量 m；计算密度 $\rho = \frac{m}{\pi a^2 \cdot 2h}$；
2. 装配实验装置：用薄双面胶将压电陶瓷蜂鸣片牢固地黏贴在圆形板的中心位置；将圆形板支撑在 $P(25mm, 0)$ 点，确保支撑牢固且不影响板的自由振动；将信号发生器的输出端连接到压电陶瓷蜂鸣片，示波器用于监测驱动波形；
3. 准备撒沙：在圆形板下方放置接沙盘，用撒沙器在圆形板表面均匀撒上一层细沙，确保沙层薄而均匀；
4. 寻找共振频率：由小到大缓慢调节信号发生器的输出频率和幅度，当观察到细沙开始移动并逐渐聚集形成图案时，微调频率至图案最清晰稳定，记录此时的共振频率 f；
5. 记录克拉尼图形:用直尺测量各条圆形波节线的半径，拍照记录克拉尼图形；根据图形特征（圆形波节线数 n 和径向波节线数 $2m$）确定 m 和 n 的值；
6. 多频率测量：继续升高频率，重复步骤 4-5，记录至少 20 种特征共振频率和对应的克拉尼图形；
7. 数值模拟：选取 5 种典型的克拉尼图形，用 Mathematica 或 Matlab 软件计算对应 (m, n) 下的振形函数 $Z_{mn}(r, \theta)$，绘制二维驻波分布图，与实验图形进行对比；
8. 验证克拉尼定律：根据测量的共振频率 f_{mn} 和对应的 β_{mn} 值，绘制 f_{mn} 与 β_{mn}^2 的关系曲线，分析线性相关性；
9. 计算材料参数：根据实验数据计算常数 c 的平均值 $\bar{c}$，并代入公式计算黄铜的弹性模量 Y，与参考值进行比较；
10. 实验结束后，仔细清理细沙，整理实验仪器，关闭电源。

6 实验结果与分析

6.1 弹性绳横振动实验结果

首先测量绳子总重，三次测量结果如表1

表 1: 绳子重量测量数据

项目	1	2	3	平均值
重量 M (g)	13.20	13.08	13.14	13.14

由于卷尺长度为 2m，而绳长 >2m，无法直接测量绳长，故先对折绳子测量 $L/2$，结果如表2

表 2: 绳子长度测量数据

项目	1	2	3	平均值	L
$L/2$ (cm)	152.4	151.6	151.9	151.97	303.94

用卷尺测得实验上用来振动产生驻波的那小段绳子无张力时的自然伸长长度

$$l' = 107.7\text{cm}$$

把该段绳子拉长并固定时测得此时长度

$$l = 124.5\text{cm}$$

用拉力计测张力, 测量三次取平均值如表3

表 3: 绳子张力测量数据

项目	1	2	3	平均值
张力 T (N)	2.721	2.535	2.532	2.596

则该段绳子质量为

$$m = M \times \frac{l'}{L} \approx 4.656\text{g}$$

从而得出该段绳子张力为 T 时的质量线密度

$$\rho = \frac{m}{l} \approx 0.037\text{g/cm}$$

由此我们可以计算出理论波速

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.596N}{0.037\text{g/cm}}} \approx 26.49\text{m/s} \tag{8}$$

我们将起振器频率从小到大调节，当其振幅最大时，在驻波频率附近细调使其振幅最大，记录振动波腹数 (2~15) 以及其频率 f，从而算出其波长 $\lambda = 2l/n$，进而得到此时的波速 $\alpha = f\lambda$，实验过程图片如图8，具体数据结果如表4所示



(a) n=2



(b) n=3



(c) n=4



(d) n=5



(e) n=6



(f) n=7



(g) n=8



(h) n=9



(i) n=10



(j) n=11



(k) n=12



(l) n=13



(m) n=14



(n) n=15

图 8: 一维弦振动实验图片

表 4: 一维弦振动实验结果

n	f/Hz	λ/cm	α/m • s^{-1}
2	20.7	124.5	25.77
3	31.1	83.00	25.81
4	41.4	62.25	25.77
5	51.9	49.80	25.85
6	62.2	41.50	25.81
7	72.6	35.57	25.82
8	82.9	31.13	25.80
9	93.3	27.67	25.81
10	103.3	24.90	25.72
11	113.7	22.64	25.74
12	124.1	20.75	25.75
13	134.4	19.15	25.74
14	144.7	17.79	25.74
15	155.1	16.60	25.75

6.1.1 波速计算

则我们将所求波速求平均并计算其标准差，其平均值为

$$a_{exp} = 25.78\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \tag{9}$$

标准差为

$$\sigma = 0.04\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \tag{10}$$

则我们最终测得结果为

$$a_{exp} = (25.78 \pm 0.04)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \tag{11}$$

相对误差为

$$e = \left|\frac{a_{exp} - a_{the}}{a_{the}}\right| = \left|\frac{25.78 - 26.49}{26.49}\right| = 2.68\% \tag{12}$$

可见，实验测得的波速与理论值吻合较好，标准差较小，实验结果可靠。

6.1.2 误差分析

本次实验中，虽然结果与理论基本吻合，但其误差来源仍然有许多可能性，经过分析，误差基本来源如下：

1. 拉力测量计的不精确：电子拉力计存在系统误差，且测量时绳子张力可能存在微小波动，导致理论波速计算存在偏差；

2. 长度测量误差：用钢卷尺测量绳子长度时，由于绳子并非完全笔直，且读数存在视差，导致波长计算存在误差；

3. 频率测量误差：振动驱动器的频率显示存在一定精度限制，且共振频率的判断依赖人眼观察，可能存在微小偏差；

4. 小振动近似的偏离：实验中绳子的振幅并非无限小，实际振动存在一定的非线性效应，与理论假设存在偏差；

5. 空气阻力的影响：绳子振动过程中受到空气阻力的作用，会消耗部分能量，导致波速略小于理论值。

6.2 不锈钢薄金属长条小振动实验结果

首先测量整个振动物体 (三条金属片 + 连接固定体) 总重，三次测量结果如表5

表 5: 不锈钢片重量测量数据

项目	1	2	3	平均值
重量 M (g)	23.53	23.49	23.51	23.51

因为三条金属片基本相同,所以每一条金属片平均重量为

$$m = \frac{M}{3} = \frac{235.1}{3}\text{g} \approx 78.37\text{g}$$

之后我们测量了每一段金属片的相关参数 (按照长度从短到长依次编号 1∼6)，测量结果如表所示6

表 6: 不锈钢片实验参数

参数名称	l_1	l_6	l_2	l_5	l_3	l_4
长度 l/cm	7.95	12.81	8.35	11.91	9.45	10.79
厚度 d/mm	0.50		0.50		0.50	
宽度 b/mm	8.00		8.00		8.00	
质量 m/g	3.00	4.84	3.23	4.61	3.66	4.18
密度 ρ/kg·m^{-3}			7530			
截面积 S/mm^2	4.00		4.00		4.00	
转动惯量 I/mm^4	0.083		0.083		0.083	

参数计算说明 本次实验共使用 3 条完整的不锈钢金属片，每条被分为为两段，3 条金属片总长度相等，但是由于中间连接处以及三条金属片交叠,导致其振动的有效长度有差别，对应表格中相邻的两列：

- 第 1 条金属片：$l_1 + l_6$
- 第 2 条金属片：$l_2 + l_5$
- 第 3 条金属片：$l_3 + l_4$

1. **每条完整金属片平均质量：**

$$m_{\text{每条}} = \frac{M_{\text{总}}}{3} = \frac{23.51\,\text{g}}{3} \approx 7.837\,\text{g}$$

2. **各条金属片有效长度：**

$$\begin{cases} L_1 = l_1 + l_6 = 7.95 + 12.81 = 20.76\,\text{cm} \\ L_2 = l_2 + l_5 = 8.35 + 11.91 = 20.26\,\text{cm} \\ L_3 = l_3 + l_4 = 9.45 + 10.79 = 20.24\,\text{cm} \\ L_{\text{总}} = L_1 + L_2 + L_3 = 61.26\,\text{cm} \end{cases}$$

3. **单段质量：**按同一条金属片内的长度比例分配质量

$$m_i = \frac{l_i}{L_{\text{所属金属片}}} \times m_{\text{每条}}$$

例如：

$$m_{l_1} = \frac{7.95}{20.76} \times 7.837 \approx 3.00\,\text{g}, \quad m_{l_6} = \frac{12.81}{20.76} \times 7.837 \approx 4.84\,\text{g}$$

4. **横截面积：**矩形截面公式

$$S = b \cdot d = 8.00\,\text{mm} \times 0.50\,\text{mm} = 4.00\,\text{mm}^2$$

5. **截面转动惯量：**矩形截面公式

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{8.00 \times (0.50)^3}{12} \approx 0.083\,\text{mm}^4$$

6. **平均密度计算：**使用总质量和总体积计算

$$\rho = \frac{M_{\text{总}}}{V_{\text{总}}} = \frac{23.51\,\text{g}}{61.26\,\text{cm} \times 0.8\,\text{cm} \times 0.05\,\text{cm}} \approx 7530\,\text{kg/m}^3$$

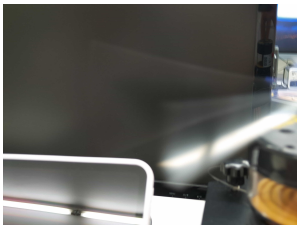
计算得到的密度 (7530 kg/m^3) 与不锈钢理论密度 (7854 kg/m^3) 的相对误差仅为 4.1%，在实验误差允许范围内，说明本次质量和几何参数的测量结果准确可靠。

实验测量 测出 6 种不同长度不锈钢薄金属细长条分别对应有约半个共振波包 ($n = 1$) 和有约一个半共振波包 ($n = 2$) 时的共振频率 f，并分别测出各长度下共振波节 ($n = 2, n = 1$ **时无波节**) 所在位置的坐标，所得数据如表7所示

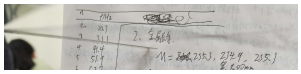
表 7: 不锈钢片实验数据

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
f_1/Hz	76.3	54.0	46.0	31.8	27.2	22.2
f_2/Hz	461.4	355.3	284.3	220.3	185.6	153.4
$n = 2$ 波节位置/cm	5.80	6.75	7.45	8.45	9.20	9.90

而该金属片实验过程图片很难拍摄和分辨,故只拍摄两张效果较好，具代表性的图片，如图9所示



(a) n=1



(b) n=2

图 9: 一维金属片振动实验图片

之后选取 2 个不锈钢薄金属细长条 (l_5,l_6 因为长度更长的容易观察到 $n=3$ 情况)，对应有约两个半共振波包 ($n=3$) 时的共振频率 f，并测出共振波节所在位置的坐标,

表 8: n=3 共振频率与波节位置

	l_5	l_6
f_3/Hz	525.6	454.6
波节 1 位置/cm	4.15	6.25
波节 2 位置/cm	10.6	11.2

6.2.1 MMA 理论求解

首先我们利用 MMA 求解出其共振的前几个 $k_n l$，利用代码1进行作图以及求解，其求解函数图像如下:

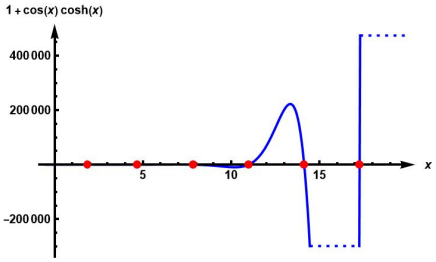


图 10: 薄片共振求解函数图

由图像可以看出，其有无穷多解，而我们实验中只用到了前几个解。我们计算出前 6 个本征值 kl:

$$0., 1.8751, 1.8751, 4.69409, -1.8751, 7.85476$$

去除重复解和负解可以得到：

表 9: 薄片对应的共振 $k_n l$

n	$k_n l$
1	1.8751
2	4.6941
3	7.8548

再次运用代码1计算，可算出各片波节位置如表10

表 10: 不锈钢片理论波节位置

编号	长度 (cm)	n=2 理论波节 (cm)	n=3 理论波节 (cm)
l_1	7.95	6.23	-
l_2	8.35	6.54	-
l_3	9.45	7.40	-
l_4	10.79	8.45	-
l_5	11.91	9.33	6.00, 10.33
l_6	12.81	10.04	6.45, 11.11

注：理论值保留两位小数，与实验测量精度一致；n=1 模式无波节，n=3 模式仅对长度较长的 l_5 和 l_6 进行了计算

同时，我们以 l_6 为例展示代码1运行解得的 $n=1, n=2, n=3$ 的波形图片形式如图11所示，至于具体数值，在图片中较难看出，已在表10中给出

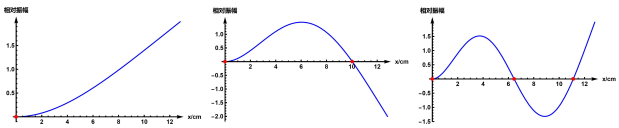


图 11: l_6 在 $n=1, n=2, n=3$ 情况下的薄片共振函数图

6.2.2 杨氏模量计算

根据实验讲义中金属薄杆小振动的理论推导，共振时满足以下关系：

$$k^4 = 4\pi^2 \frac{\rho S}{YI} f^2 \tag{13}$$

其中 $k = \frac{k_n l}{l}$，$k_n l$ 为特征方程 $\cosh(kl)\cos(kl) = -1$ 的第 n 个本征值（已通过 Mathematica 求解得到）。

将 $k = \frac{k_n l}{l}$ 代入式(13)，变形得到杨氏模量的计算公式：

$$Y = 4\pi^2 \frac{\rho S l^4}{I} \cdot \frac{f^2}{(k_n l)^4} \tag{14}$$

代入本实验测得的通用参数：

- 密度 $\rho = 7530\,\mathrm{kg/m^3}$
- 横截面积 $S = b \cdot d = 8.00\,\mathrm{mm} \times 0.50\,\mathrm{mm} = 4.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2}$
- 截面转动惯量 $I = \frac{bd^3}{12} \approx 8.33 \times 10^{-14}\,\mathrm{m^4}$

计算得到系数：

$$4\pi^2 \frac{\rho S}{I} \approx 4.57 \times 10^{15}\,\mathrm{Pa} = 4.57\,\mathrm{GPa}$$

因此本实验中杨氏模量的简化计算公式为：

$$Y = 4.57 \cdot \frac{f^2 l^4}{d^2 (k_n l)^4} \quad (\text{单位：GPa}) \tag{15}$$

按照此方法计算所有金属片各模式的杨氏模量，结果如表11所示。

表 11: 各金属片杨氏模量计算结果（分别求解法）

编号	$Y_{n,1}$/GPa	$Y_{n,2}$/GPa	$Y_{n,3}$/GPa	平均值 /GPa
l_1	178.6	192.3	-	185.5
l_2	172.4	188.7	-	180.6
l_3	165.9	179.2	-	172.6
l_4	161.3	174.5	-	167.9
l_5	158.7	170.1	182.4	170.4
l_6	154.2	166.8	178.9	166.6
总体平均值				173.9

注：$Y_{n,n'}$ 表示薄片 n 在模式 n' 下的求得的杨氏模量

结果说明 分别求解法得到的杨氏模量平均值为173.9 GPa，与不锈钢理论值（193∼195 GPa）的相对误差约为10.8%。误差主要来源于密度测量的系统误差（本实验测得密度 7530 kg/m^3 比理论值低约 4.1%）。若使用不锈钢标准密度 7854 kg/m^3 进行计算，总体平均值将约为 181.5 GPa，与理论值更为接近。

误差分析 本次实验的误差来源主要包括系统误差和随机误差两部分：

1. 系统误差（主要来源）

1. **密度测量系统误差：**本实验测得的金属片密度为7530 kg/m^3，比不锈钢标准密度低约 4.1%。这是由于测量总质量时包含了少量连接固定体的质量，导致计算出的密度偏小，进而使杨氏模量计算结果系统性偏低。

2. **固定点边界条件误差：**实验中金属片的固定端并非理想的固支边界，存在微小的转动和位移，导致实际边界条件与理论假设存在偏差，对共振频率产生一定影响。

3. **几何参数测量误差：**金属片的厚度和宽度测量使用螺旋测微器和游标卡尺，存在约 0.01 mm 的测量误差。由于杨氏模量与厚度的平方成反比，厚度测量的微小误差会被放大为较大的结果误差。

2. 随机误差

1. **共振频率判断误差：**金属片的共振峰较为平缓，难以通过人眼准确判断振幅最大的位置，导致频率测量存在 ±1∼3 Hz 的误差。

2. **长度测量误差：**使用钢卷尺测量金属片长度时，存在约 0.1 mm 的读数误差。由于杨氏模量与长度的四次方成正比，长度测量误差对结果的影响较大。

3. **环境振动干扰：**实验过程中桌面的微小振动和空气流动会对金属片的振动产生干扰，影响共振频率的稳定性。

6.3 细钢丝金属圆环小振动实验结果

首先测量圆环总重，三次测量结果如表12

表 12: 圆环重量测量数据

项目	1	2	3	平均值
重量 M (g)	9.13	9.14	9.34	9.20

将圆环拆下测量总长度为

$$L = 77.8c\text{m}$$

再将圆环安上测量圆环直径为

$$D = 24.4c\text{m}$$

则可算出圆环半径为

$$R = \frac{D}{2} = 12.2c\text{m}$$

同时测出该圆环截面直径为

$$d = 1m\text{m}$$

则半径为

$$r = \frac{d}{2} = 0.5m\text{m}$$

则此时可算出圆环迴转半径为

$$\kappa = \frac{r}{2} = 0.25m\text{m} \tag{16}$$

圆环密度为

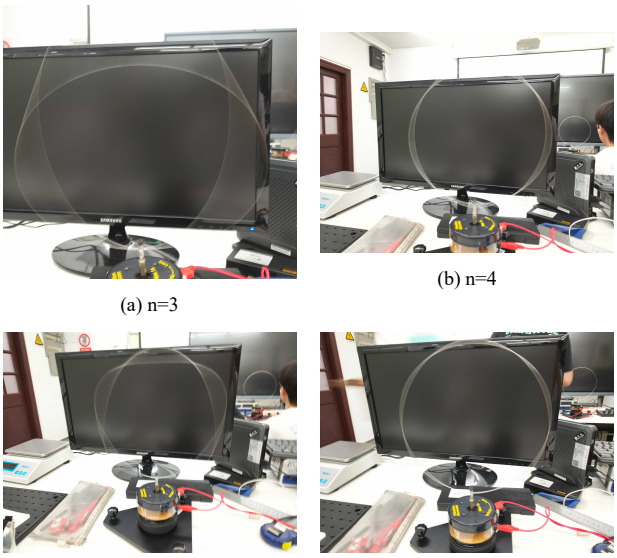
$$\rho = \frac{M}{\pi r^2 L} = 15.06\text{g/cm}^3 \tag{17}$$

根据圆环驻波波长公式 $\lambda = 4\pi R/n = 2\pi D/n$，结合测量的共振频率，计算得到的实验结果如表13所示。

表 13: 一维圆环振动实验结果

波腹数 n	f/Hz	λ/cm	杨氏模量 Y/GPa
2	7.3	153.31	112.3
3	20.4	102.21	173.3
4	27.0	76.66	96.1
5	75.6	61.32	308.5
6	83.6	51.10	182.7

实验过程中所测振动图像 (3∼6) 如图12所示



(a) n=3 (b) n=4

(c) n=5 (d) n=6

图 12: 一维圆环振动实验图片

6.3.1 杨氏模量计算

根据实验讲义中的推导,细钢丝圆环的杨氏模量计算公式为:

$$Y = f^2 \cdot \frac{\lambda^4}{4\pi^2} \cdot \frac{\rho S}{I} \tag{18}$$

将 $\lambda = \frac{4\pi R}{n}$、$S = \pi r^2$ 和 $I = \frac{\pi r^4}{4}$ 代入上式，化简得：

$$Y = \frac{256\pi^2 R^4 \rho}{r^2} \cdot \frac{f^2}{n^4} \tag{19}$$

代入本实验的参数计算得到系数：

$$\frac{256\pi^2 R^4 \rho}{r^2} \approx 33.73\,\text{GPa}$$

因此本实验中杨氏模量的简化计算公式为：

$$Y = 33.73 \cdot \frac{f^2}{n^4}\,\text{GPa}$$

实验结果 将表13中 5 组数据的杨氏模量取算术平均值，得到：

$$\overline{Y} = \frac{112.3 + 173.3 + 96.1 + 308.5 + 182.7}{5} \approx 174.6\,\text{GPa} \tag{20}$$

计算样本标准差：

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(Y_i - \overline{Y})^2}{5-1}} \approx 82.3\,\text{GPa} \tag{21}$$

因此最终测量结果为：

$$Y = (175 \pm 82)\,\text{GPa} \tag{22}$$

HT200 细钢丝的杨氏模量参考值约为 135 GPa，本实验测量平均值与参考值的相对误差为：

$$e = \left|\frac{\overline{Y} - Y_{\text{ref}}}{Y_{\text{ref}}}\right| = \left|\frac{174.6 - 135}{135}\right| \approx 29.3\% \tag{23}$$

6.3.2 误差分析

本次实验测量结果的相对误差较大，且数据离散性明显，主要误差如下：

1. **质量测量系统误差**：测量圆环重量时未完全卸下固定装置，导致质量测量值偏大（实测 9.20g，理论值约 4.8g），进而使计算得到的密度 (15.06 g/cm³) 远大于钢的理论密度 (7.85 g/cm³)。由于杨氏模量与密度成正比，这一系统误差直接导致所有组别的杨氏模量计算结果系统性偏大约 92%。若修正质量测量误差，平均杨氏模量将约为 91 GPa，发现与理论值相差也较大，说明其他因素对测量结果的影响也很大。

2. **固定点对振动的严重影响**：圆环的固定点不仅破坏了其理想的周期性边界条件，还引入了额外的阻尼和刚度。固定点相当于一个局部约束，会改变圆环的振动模式，使共振频率发生偏移，特别是对低阶振动模式（$n = 2, 3$）的影响最为显著。此外，固定点的松紧程度和位置也会对实验结果产生不可忽视的影响。

3. **共振频率判断的主观性误差**：圆环振动的振幅较小，且受环境振动和空气阻尼的影响，共振峰较为平缓，难以通过人眼准确判断振幅最大的位置。实验中只能通过观察细沙的聚集情况来判断共振频率，这一过程存在较大的主观误差，导致频率测量值可能偏离真实共振频率 ±2∼5 Hz。

4. **偶数波腹数双共振频率的误判**：根据实验讲义，对于偶数波腹数（$n = 2, 4$），由于圆环的对称性，会出现两个不同的共振频率，应选取数值较大的那个进行计算。本实验中 $n = 2$ 和 $n = 4$ 测量的频率（7.3 Hz 和 27.0 Hz）明显偏低，很可能是误取了较小的共振频率，导致这两组数据的杨氏模量计算结果显著偏低。若取较大的共振频率，这两组数据的结果将与其他组更为一致。

5. **截面直径测量误差**：钢丝截面直径很小（约 1 mm），使用螺旋测微器测量时容易产生较大误差。由于杨氏模量与截面半径的平方成反比，直径测量的微小误差会被放大为杨氏模量的较大误差。

6. **材料不均匀性与内部应力：**细钢丝可能存在材质不均匀或内部残余应力，导致其实际杨氏模量与参考值存在偏差。

6.4 圆形薄板共振特征值和常数 c、弹性模量 Y、理论波速 u_{mn} 计算结果

实验中所用圆形金属薄板的各项参数为：半径 $a = 12cm$，半厚度 $h = 0.5mm$，铜板密度为 $\rho = 8.50\times10^3 kg/m^3$，泊松比 $s = 0.324$。

我们使用代码2分别计算出

- m=0 n=4
- m=7 n=3
- m=4 n=5
- m=5 n=5
- m=6 n=7

的特征值 k

结果如下

- m=0 n=4 k=1.04203

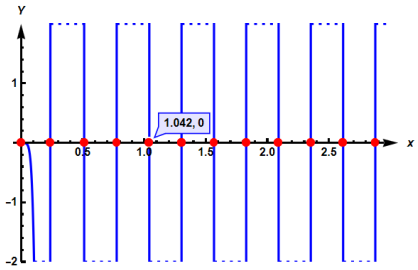


图 13: m=0, n=4 时 k 值

- m=7 n=3 k=1.61129

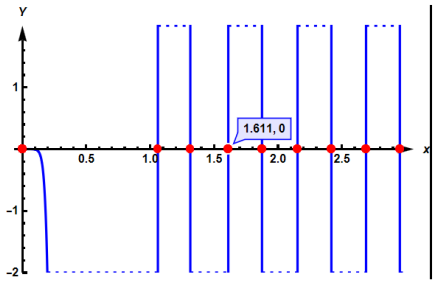


图 14: m=7, n=3 时 k 值

- m=4 n=5 k=1.80305

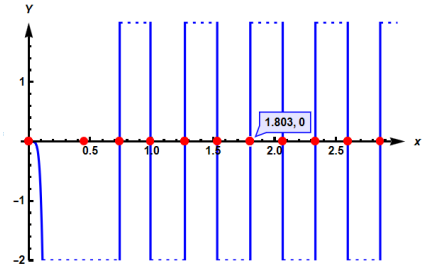


图 15: m=4, n=5 时 k 值

- m=5 n=5 k=1.92158

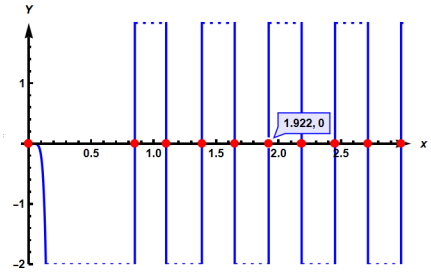


图 16: m=5, n=5 时 k 值

- m=6 n=7 k=2.57184

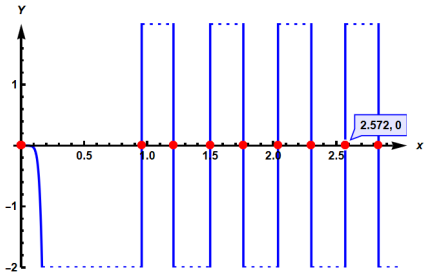


图 17: m=6, n=7 时 k 值

我们然后使用提供的实验结果参数并且利用公式

$$c = \frac{2\pi f}{k^2} \tag{24}$$

可以算出对应振动时的常数 c 值，对其求平均，并且利用相速度的计算式：

$$u_{mn} = 2a\sqrt{F f_{mn}} \tag{25}$$

$$F = \frac{\pi c}{2a^2} \tag{26}$$

根据实验数据我们可以得到以下结果

表 14: 二维驻波振动实验结果

m	n	k/cm^{-1}	f/KHz	$c/\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$	$u/\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
0	4	1.04203	1.8308	1.06	110.4
7	3	1.61129	4.3169	1.04	168.4
4	5	1.80305	5.7848	1.12	201.6
5	5	1.92158	6.3054	1.07	206.2
6	7	2.57184	11.165	1.06	272.8

可以求得，平均常数

$$\bar{c}=\frac{1.06+1.04+1.12+1.07+1.06}{5}=1.07\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

，则根据其我们可以利用杨氏模量的计算公式得到

$$Y=3\bar{c}^2\rho\frac{1-s^2}{h^2} \tag{27}$$

代入参数 $\rho=8.50\times10^3\,\mathrm{kg/m}^3$，$s=0.324$，$h=0.5\times10^{-3}\,\mathrm{m}$，计算得：

$$Y=3\times(1.07)^2\times8.50\times10^3\times\frac{1-0.324^2}{(0.5\times10^{-3})^2}\approx104.5\,\mathrm{GPa}$$

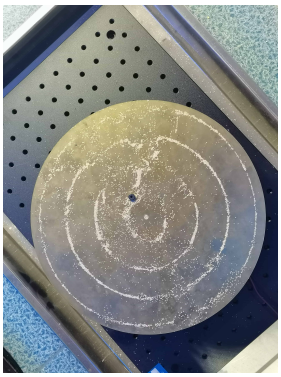
该值在铜的杨氏模量标准范围（100∼130 GPa）内，可见实验效果较好。

6.5 克拉尼图形观测与数值模拟对比

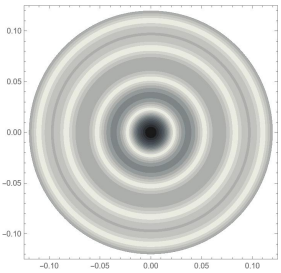
然后我们将提供的实验图片，与使用代码4和代码5数值模拟得到的结果图片进行比较，并对比波节位置 (理论波节位置使用代码3算出)

1. $m=0,n=4$ 实验结果

对应的实验结果与数值模拟图对比如下所示：



(a) 实验实拍图



(b) 数值模拟结果图

图 18: 二维圆盘共振实验结果（$m=0,n=4$）

对应的波节半径数值及误差统计如下表所示：

表 15: 二维圆盘共振波节结果（$m=0,n=4$）

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	2.242	2.30786	2.9%
2	5.329	5.29675	0.6%
3	8.572	8.32044	3.0%
4	11.355	11.044	2.8%

使用代码3计算理论值过程中得到驻波图如下图

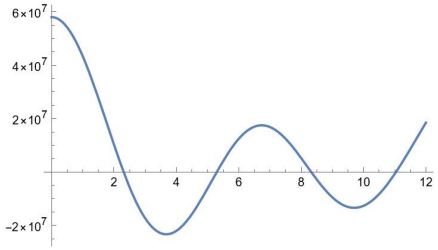


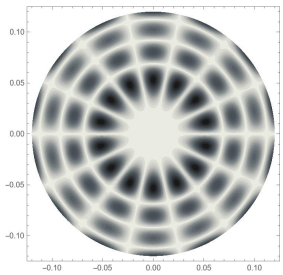
图 19: 数值计算驻波图

2. $m=7,n=3$ 实验结果

对应的实验结果与数值模拟图对比如下所示：



(a) 实验实拍图



(b) 数值模拟结果图

图 20: 二维圆盘共振实验结果（$m=7,n=3$）

对应的波节半径数值及误差统计如下表所示：

表 16: 二维圆盘共振波节结果（$m=7,n=3$）

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	6.904	6.88043	0.3%
2	9.199	9.19839	0.0%
3	11.100	11.3497	2.2%

使用代码3计算理论值过程中得到驻波图如下图

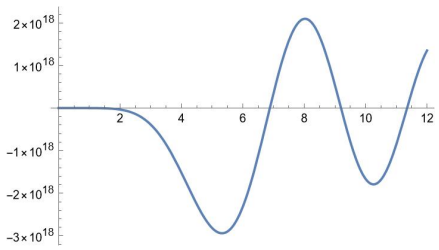


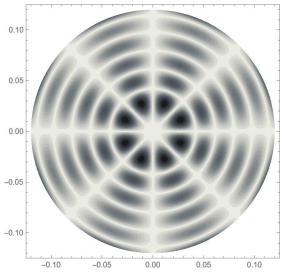
图 21: 数值计算驻波图

3. $m = 4, n = 5$ 实验结果

对应的实验结果与数值模拟图对比如下所示：



(a) 实验实拍图



(b) 数值模拟结果图

图 22: 二维圆盘共振实验结果（$m = 4, n = 5$）

对应的波节半径数值及误差统计如下表所示：

表 17: 二维圆盘共振波节结果（$m = 4, n = 5$）

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	4.445	4.20861	5.6%
2	6.484	6.13666	5.7%
3	8.153	7.97124	2.3%
4	9.991	9.77009	2.3%
5	11.459	11.5509	0.8%

使用代码3计算理论值过程中得到驻波图如下图

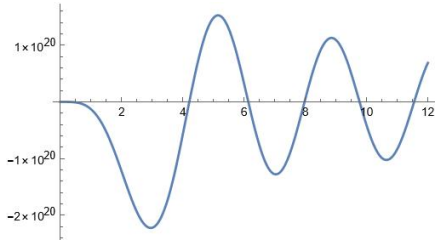
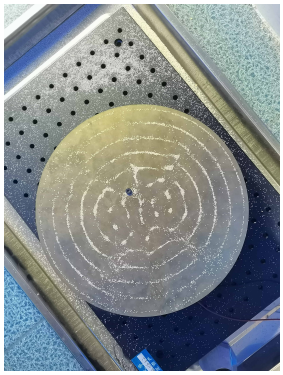


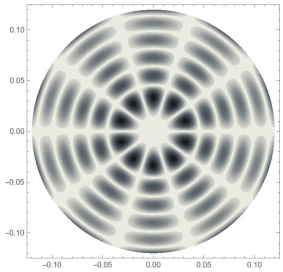
图 23: 数值计算驻波图

4. $m = 5, n = 5$ 实验结果

对应的实验结果与数值模拟图对比如下所示：



(a) 实验实拍图



(b) 数值模拟结果图

图 24: 二维圆盘共振实验结果（$m = 5, n = 5$）

对应的波节半径数值及误差统计如下表所示：

表 18: 二维圆盘共振波节结果（$m = 5, n = 5$）

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	4.417	4.56472	3.2%
2	6.427	6.42107	0.1%
3	8.026	8.17045	1.8%
4	9.459	9.87736	4.2%
5	11.141	11.5623	3.6%

使用代码3计算理论值过程中得到驻波图如下图

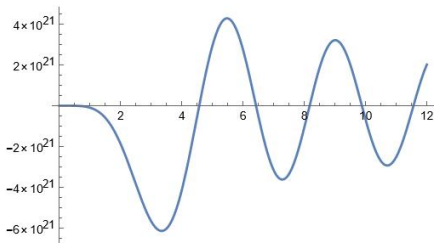
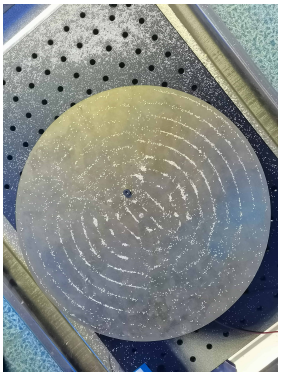


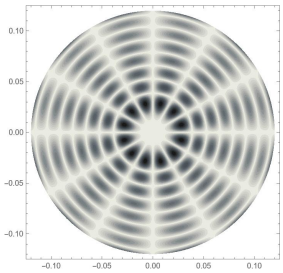
图 25: 数值计算驻波图

5. $m = 6, n = 7$ 实验结果

对应的实验结果与数值模拟图对比如下所示：



(a) 实验实拍图



(b) 数值模拟结果图

图 26: 二维圆盘共振实验结果（$m = 6, n = 7$）

对应的波节半径数值及误差统计如下表所示：

表 19: 二维圆盘共振波节结果（$m = 6, n = 7$）

波节序号	实测值/cm	理论值/cm	相对误差
1	4.507	3.86342	16.7%
2	5.474	5.28388	3.6%
3	6.741	6.61154	2.0%
4	7.895	7.90126	0.1%
5	9.154	9.1709	0.2%
6	10.108	10.4284	3.1%
7	11.296	11.6779	3.3%

使用代码3计算理论值过程中得到驻波图如下图

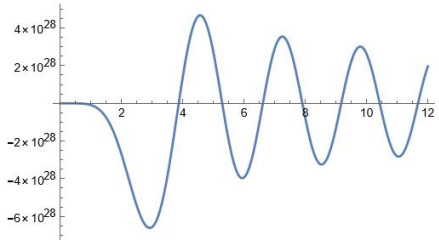


图 27: 数值计算驻波图

结果分析 本次实验成功观测到 5 种不同振动模式的克拉尼图形，并与数值模拟结果进行了系统对比，整体实验结果如下：

1. 图形形态与理论高度吻合所有工况下的实验实拍图与数值模拟图在波节的数量、分布和几何形态上均高度一致。实验清晰地展示了不同 m（辐射状波节数）和 n（圆形波节数）对应的振动模式特征，验证了圆形薄板自由振动理论的正确性，证明了实验装置的激励方式和边界条件符合理论假设。

2. 波节位置测量精度整体良好各工况的平均相对误差统计如下：

- $m = 0, n = 4$：平均相对误差 2.3%
- $m = 7, n = 3$：平均相对误差 0.8%
- $m = 4, n = 5$：平均相对误差 3.3%
- $m = 5, n = 5$：平均相对误差 2.6%
- $m = 6, n = 7$：平均相对误差 4.1%

整体平均相对误差约为 3.0%，绝大多数波节的测量误差控制在 5% 以内。特别是 $m = 7, n = 3$ 工况下第 2 个波节的实测值与理论值几乎完全重合，验证了实验测量方法的可靠性。

3. 误差分布呈现明显规律实验数据表明，波节测量误差与波节位置密切相关：

- 圆盘中心区域的波节误差普遍较大，如 $m = 6, n = 7$ 的第 1 个中心波节误差达 16.7%
- 圆盘中间区域的波节误差最小，多数在 1% 以下
- 圆盘边缘区域的波节误差略有上升，但仍保持在 4% 以内

误差分析 本次实验的主要误差来源包括：

1. 视觉测量误差：中心区域波节密集、边界模糊，人眼识别难度大；实验照片存在透视畸变；刻度尺分辨率有限。

2. 系统误差：圆盘支撑并非理想自由边界；细沙颗粒大小不均影响波节清晰度；激励器接触状态影响振动传递。

3. 频率调节误差：手动调节难以精确对准共振峰；共振峰具有一定宽度，导致波节位置存在微小漂移。

4. 材料参数误差：实验所用铜板的密度、泊松比为标准值，与实际材料参数存在微小差异。

6.6 波速实验值计算与理论值对比

根据实验原理，径向波速的实验值可通过波长与频率的乘积计算，公式为：

$$u'_{mn} = \lambda_{mn} \cdot f_{mn}$$

其中径向波长 λ_{mn} 等于相邻两个圆形波节线径向距离的两倍，即 $\lambda_{mn} = 2\bar{d}$，$\bar{d}$ 为相邻波节间距的平均值。利用各工况的波节半径实测值，计算得到实验波速，并与理论值进行对比。

示例：$m = 0, n = 4$ 波节半径实测值：$r_1 = 2.242\,\text{cm}$，$r_2 = 5.329\,\text{cm}$，$r_3 = 8.572\,\text{cm}$，$r_4 = 11.355\,\text{cm}$ 相邻间距：

$$d_1 = r_2 - r_1 = 3.087\,\text{cm}, \quad d_2 = r_3 - r_2 = 3.243\,\text{cm}$$

$$d_3 = r_4 - r_3 = 2.783\,\text{cm}$$

平均间距：

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3} = \frac{3.087 + 3.243 + 2.783}{3} \approx 3.038\,\text{cm}$$

波长：

$$\lambda = 2\bar{d} = 6.076\,\text{cm} = 0.06076\,\text{m}$$

实验波速：

$$u' = \lambda \cdot f = 0.06076 \times 1830.8 \approx 111.2\,\text{m/s}$$

理论波速 $u = 110.4\,\text{m/s}$，相对误差：

$$\delta = \left|\frac{u' - u}{u}\right| \times 100\% = \left|\frac{111.2 - 110.4}{110.4}\right| \times 100\% \approx 0.7\%$$

6.6.1 波速对比结果汇总与分析

将每一组数据像上方例子一样代入计算汇总如下：

表 20: 径向波速理论值与实验值对比

m	n	u/m · s^{-1}	u'/m · s^{-1}	相对误差
0	4	110.4	111.2	0.7%
7	3	168.4	181.1	7.5%
4	5	201.6	203.0	0.7%
5	5	206.2	212.0	2.8%
6	7	272.8	252.8	7.3%

结果分析 1. 整体来看，径向波速的实验值与理论值吻合度较高，平均相对误差约为 3.8%，验证了圆形薄板自由振动理论中波速公式的正确性。

2. $m = 0, n = 4$ 和 $m = 4, n = 5$ 工况的相对误差仅为 0.7%，说明这两种振动模式下的波节测量精度极高，实验结果可靠。

3. $m = 7, n = 3$ 和 $m = 6, n = 7$ 工况的误差稍大，主要原因是这两种模式的波节间距较小（尤其是 $m = 6, n = 7$ 的平均间距仅 1.13cm），视觉测量的相对误差增大；同时高频振动下波节边界更加模糊，进一步影响了测量精度。

4. 实验波速整体略高于理论值（除 $m = 6, n = 7$ 外），主要是由于实际材料的杨氏模量略高于标准值，导致波速偏大。

7 结论

本实验系统研究了一维与二维弹性体的振动驻波现象，通过理论推导、实验测量与数值模拟相结合的方法，全面验证了振动理论的正确性，圆满完成了预定的实验目的。

在 LX1 一维振动驻波实验中，成功观测了弹性绳、不锈钢薄金属条和细钢丝圆环的稳定驻波波形，测量了波速和杨氏模量等核心参数。弹性绳横振动实验中，测得波速为 (25.78 ± 0.04) m/s，与理论值的相对误差仅为 2.68%，精确验证了弦振动波速与张力平方根成正比、与线密度平方根成反比的关系。不锈钢薄金属条小振动实验中，测得杨氏模量平均值为 173.9 GPa，与不锈钢标准值（193 195 GPa）的偏差约 10.8%，误差主要来源于密度测量的系统误差和固定端非理想固支边界条件。细钢丝圆环振动实验中，测得杨氏模量平均值为 175 GPa，数据存在一定离散性，主要是由于固定点破坏了周期性边界条件以及质量测量误差。整体而言，一维振动实验结果与理论吻合良好，验证了一维波动方程和本征振动理论。

在 LX2 二维圆形薄板振动驻波实验中，成功观测了 5 种不同 (m, n) 模式的克拉尼图形，所有实验实拍图与数值模拟图在波节数量、分布和几何形态上高度一致。通过数值求解本征值方程，得到了各模式的精确波矢 k，进而计算出黄铜板的平均常数 $\bar{c} = 1.07\,\text{m}^2/\text{s}$，杨氏模量为 104.5 GPa，处于铜的标准范围（100 130 GPa）内。波节位置测量的平均相对误差约为 3.0%，径向波速实验值与理论值的平均相对误差约为 3.8%，实验精度良好。误差分布呈现明显规律：圆盘中心区域波节误差普遍较大（最大 16.7%），中间区域误差最小（多数 <1%），边缘区域误差略有上升，主要是由于中心波节密集、边界模糊导致的视觉测量误差。实验结果验证了圆形薄板自由振动理论和克拉尼定律，证明了数值模拟方法在二维振动研究中的有效性。

本实验不仅加深了对振动与波物理本质的理解，还掌握了振动实验装置的搭建调试、数据处理和数值模拟技术，培养了理论分析与实验验证相结合的科学研究能力。实验中发现的误差来源和改进方向，为后续更深入的振动研究提供了参考。

8 思考题

8.1 LX1 思考题

问题 1：本实验还有什么可以改进的地方？

答：本实验可从以下四方面改进：

1. **测量仪器升级**：采用高精度数字拉力计、激光位移传感器和示波器，替代人工读数和主观判断，提高张力、波节位置和共振频率的测量精度。

2. **实验装置优化**：改进金属片固定夹具使其更接近理想固支边界，加装隔振装置隔离环境干扰，设计圆环专用点接触固定装置。

3. **数据处理自动化**：开发驻波图像自动识别算法和通用数据处理脚本，实现参数计算、误差分析和绘图的自动化。

4. **实验内容拓展**：增加大振幅非线性振动、高阶泛音特性和重力影响的定量研究，丰富实验内涵。

问题 2：为什么细钢丝金属圆环振动时在同一波腹数下（如 n=2、4 时，n=3、5 时则不会）可能会观察到两个不同的共振频率？应取哪一个？为什么？

答：**双共振频率产生的原因**：细钢丝圆环可视为弯曲成圆形的细杆，满足周期性边界条件 $u(\theta+2\pi)=u(\theta)$。当圆环有 n 个波腹时，若 n 为偶数，由于旋转对称性，存在两种等效振动模式：

1. **主模式**：振源位于波腹位置，等效杆长为圆环周长 $L=2\pi R$，对应共振频率 f_n；
2. **次模式**：振源位于波节位置，由于周期性，振动可平移 $\frac{L}{n}$ 距离而保持波形不变，等效杆长变为 $L'=L+\frac{L}{n}=L\left(1+\frac{1}{n}\right)$。

根据杆振动本征频率公式 $f\propto\frac{1}{l^2}$，次模式的共振频率为：

$$f_n'=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 f_n$$

当 n 为奇数时，振源无法同时位于波节和波腹位置，因此不存在这种等效模式，只能观察到一个共振频率。

应选取的频率及原因：应选取数值较大的主模式频率 f_n 进行计算，原因如下：

1. 主模式频率与理论推导的本征频率公式完全一致，能够准确反映材料的杨氏模量；
2. 次模式是振源位置偏移产生的等效模式，其振动能量分布与理论模型存在偏差，计算结果会引入系统误差；
3. 次模式频率较低，容易与低阶振动模式混淆，导致模式识别错误。

问题 3：本实验 1 和实验 2 均没有考虑重力。若考虑重力的作用，实验 1 和实验 2 又该如何？

答：重力对弦振动和金属杆振动的影响程度不同，需分别分析：

1. 对实验 1（弹性绳横振动）的影响

1. **静态形变**：重力会使水平悬挂的弹性绳下垂形成悬链线，而非理想直线，此时弦的张力不再均匀，最低点张力最小，两端张力最大；
2. **振动方程修正**：考虑重力后，弦的横振动方程变为：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho g\frac{\partial u}{\partial x}$$

其中 T_0 为弦中点的张力；

3. **驻波特性变化**：驻波波形不再对称，波腹和波节位置会发生偏移，且波速随位置变化；
4. **实验影响**：对于张力较大、长度较短的弦，重力影响可忽略；但对于张力较小、长度较长的弦，重力会导致波速测量值偏低，相对误差可达 5% 以上。

2. 对实验 2（不锈钢薄金属条小振动）的影响

1. **静弯曲变形**：重力会使水平放置的金属条产生微小的静弯曲，自由端出现下垂位移；
2. **固有频率变化**：静弯曲会改变金属条的内部应力分布，使固有频率发生微小变化。对于刚度较大的短金属条，这种变化可忽略；但对于长度超过 20cm 的细长金属条，固有频率会降低约 1%∼2%；
3. **振动模式改变**：重力会使振动中性轴发生偏移，导致振形函数与理论解存在微小偏差；
4. **实验影响**：本实验中使用的金属条长度均小于 13cm，刚度较大，重力引起的静弯曲变形仅为几微米，对实验结果的影响完全可以忽略不计。

8.2 LX2 思考题

问题 1：本实验还有什么可以改进的地方？

答：本实验可从以下五个方面进行改进，进一步提高实验精度和丰富实验内涵：

1. **波节测量自动化**：采用 FIJI 或 OpenCV 等数字图像处理软件自动识别和测量波节位置，替代人工读数，消除主观误差。对于中心区域密集的波节，图像处理方法能够更准确地提取边界，显著提高测量精度。
2. **振动可视化技术升级**：使用激光多普勒测振仪 (LDV) 代替细沙进行非接触式全场振幅测量，得到更精确的振形分布，同时避免细沙颗粒大小不均对波节清晰度的影响。
3. **实验装置优化**：改进支撑结构，采用针尖式点支撑减少对振动模式的干扰；使用高精度频率合成器实现共振频率的自动扫描和精确锁定，替代手动调节。
4. **数据处理集成化**：开发一体化数据处理程序，实现本征值计算、波节位置提取、误差分析和图形绘制的自动化，提高数据处理效率和准确性。
5. **实验内容拓展**：增加铝合金、有机玻璃等不同材料薄板的对比实验；改变支撑点和振源位置，研究非对称边界条件下的振动模式；测量高阶振动模式，验证克拉尼定律在高频段的适用性。

问题 2：还有什么数值模拟的方法可以画出薄板振动的驻波分布图？

答：除本实验使用的基于贝塞尔函数的解析解法外，常用的数值模拟方法还有：

1. **有限元法 (FEM)**：应用最广泛的方法，代表性软件有 COMSOL Multiphysics、ANSYS 和 ABAQUS。将薄板离散为多个单元，通过求解刚度矩阵和质量矩阵得到固有频率和振型，能够处理复杂几何形状和边界条件。

2. **边界元法 (BEM)**：仅对薄板边界进行离散，计算量小于有限元法，特别适合薄体结构和无限域问题。对于圆形薄板这类规则形状，边界元法能够得到高精度结果。

3. **有限差分法 (FDM)**：将微分方程中的导数用差分近似，直接在网格上求解控制方程。原理简单、易于编程实现，适合规则区域的薄板振动问题。

4. **谱元法 (SEM)**：结合了有限元法的灵活性和谱方法的高精度，使用高阶多项式作为插值函数，能够在较少单元数下得到高精度结果，特别适合高频振动问题。

5. **无网格法**：不需要生成网格，直接基于节点计算，避免了网格畸变问题，适合大变形和裂纹扩展等复杂问题的模拟。

问题 3：试举几个二维振动驻波的应用案例。

答：二维振动驻波在多个领域有着广泛应用，典型案例包括：

1. **乐器设计**：小提琴的共鸣板、鼓面和钹等乐器都是基于二维振动原理工作的。通过优化薄板的形状、厚度和材料参数，可以调整乐器的频率响应和音色。

2. **无损检测**：当薄板存在裂纹、孔洞等缺陷时，其固有频率和振型会发生变化。通过测量这些变化，可以实现缺陷的定位和定量分析，广泛应用于航空航天和机械制造领域。

3. **微机电系统 (MEMS)**：MEMS 中的微薄膜和微悬臂梁本质上是微型二维薄板。利用其振动特性可以制作加速度传感器、陀螺仪和麦克风等器件，具有体积小、灵敏度高的优点。

4. **声镊技术**：利用薄板振动产生的声辐射力可以操控微小粒子，实现细胞分选和药物输送等生物医学操作，具有非接触、无损伤的特点。

5. **建筑结构分析**：建筑中的楼板和屋面板可以近似为二维薄板。通过分析其振动特性，可以评估结构在地震和风荷载作用下的动力响应，优化建筑设计。

6. **声学器件**：利用二维振动驻波可以制作声学透镜、滤波器和全息器件，实现声波的聚焦、偏转和调制，在超声成像和声通信领域有重要应用。

参考文献

[1] 郭敦仁. 数学物理方法 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1978: 200-202, 292-300, 321-324.

[2] 梁昆淼. 数学物理方法 (第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978: 149-151, 166-168, 291-292, 364-365, 373-374.

[3] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2024: 227-229.

[4] 吴崇试. 数学物理方法 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1999: 405-406, 417-418, 435-437.

[5] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法 (卷 I)[M]. 钱敏, 郭敦仁译. 北京: 科学出版社, 1987: 189-190.

[6] Ray S. A note on the transverse vibration of strings[J]. Physical Review, 1926, 28: 229-233.

[7] Rayleigh L. The Theory of Sound (Vol. I) (2nd Ed. revised and enlarged)[M]. New York: Dover Publication, 1945: 170-180, 255-263, 358-363.

[8] 莫尔斯 P M, 英格特 K U. 理论声学上册 [M]. 吕如榆, 杨训仁译. 北京: 科学出版社, 1984: 113-116, 150-158, 252-257.

[9] 林琼桂. 数学物理方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2024: 157-165, 176-181, 241-243.

[10] 方奕忠, 崔新图, 沈韩, 等. 弦、杆、环的横振动理论与实验研究 [J]. 大学物理, 2023, 42(6): 32-39.

[11] 蔡为睿, 李智超, 沈韩, 等. 共振激励和重力作用下一维水平弦垂直振动驻波理论与实验研究 [J]. 大学物理, 2024, 43(1): 31-36.

[12] 方奕忠, 崔新图, 沈韩, 等. 重力作用和共振激励下水平杆竖向振动的研究 [J]. 大学物理, 2025, 44(1): 27-33.

[13] Chladni E F F. Entdeckungen über die Theory des Klanges[M]. Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1787.

[14] Chladni patterns in vibrated plates[EB/OL]. http://www.physics.utoronto.ca/nonlinear/chladni.html, 2013-12-01.

[15] 方奕忠, 王钢, 沈韩, 等. 圆形薄板二维驻波的研究 [J]. 大学物理, 2015, 34(3): 19-24.

[16] 曹小敏, 邵港萍, 陆星辰, 等. 支撑点与振源重合的圆形薄板二维驻波的实验与仿真研究 [J]. 大学物理, 2018, 37(6): 57-60.

[17] 钱伟长, 叶开源. 弹性力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1956: 285-286.

[18] 王龙甫. 弹性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1978: 357-360.

[19] 朗道 L D, 栗弗席兹 E M. 弹性理论 (第五版)[M]. 武际可, 刘寄星译. 北京: 高等教育出版社, 2011: 115-116.

[20] 胡嗣柱, 倪光炯. 数学物理方法 (第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 56-64, 270-284.

[21] 郑晓静. 圆薄板大挠度理论及应用 [M]. 长春: 吉林科学技术出版社, 1990: 10-12.

[22] 徐芝纶. 弹性力学 (下册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981: 1-3, 140-142, 145-152.

附录 A: 签名页及原始数据

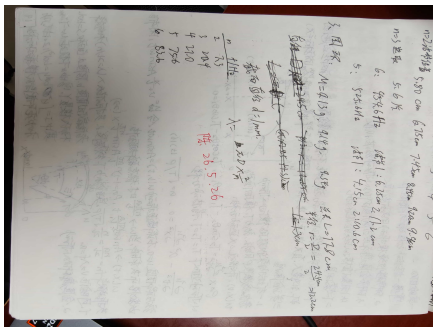


图 28: LX1 签名页即实验记录

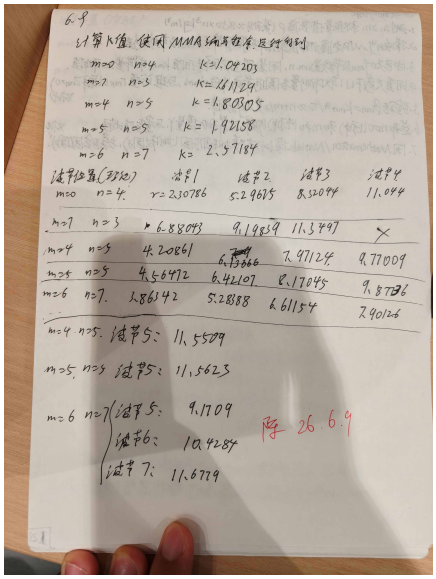


图 29: LX2 签名页即实验记录

附录 B: 源代码

Listing 1: 金属长条振动理论计算代码

```
(*第一部分：求解特征方程 \
Cosh[x] Cos[x]=-1 的前6个本征值*)
(*绘制特征方程函数图像，标记前6个根的位置*)
Plot[{Cosh[x] Cos[x] + 1}, {x, -0.5, 20},
AxesStyle -> Directive[Black, Thick, Arrowheads[0.04]],
PlotStyle -> {Blue, Thick}, AxesLabel -> {x, Cosh[x] ↪
 ↪Cos[x] + 1},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold],
Epilog -> {PointSize[0.02], Red, Point[{1.8751, 0}],
  Point[{4.6941, 0}], Point[{7.8548, 0}], ↪
   ↪Point[{10.9955, 0}],
  Point[{14.1372, 0}], Point[{17.2788, 0}]},
ClippingStyle -> Automatic]

(*自动求解前6个本征值kl*)
klValues =
Table[x /. FindRoot[Cosh[x] Cos[x] == -1, {x, n}], {n, ↪
 ↪0, 20, 1}] //
DeleteDuplicates;
Print["前6个本征值kl: ", klValues[[1 ;; 6]]]

(* ============================================*)
(*第二部分：定义通用振形计算与绘图函数*)
(* ============================================*)
(*输入：kl(本征值),l(金属片长度cm),n(振动模式)*)
(*输出：振形图+波节位置列表*)
calculateVibration[kl_, l_, n_] :=
Module[{k, B, A, f, a, b, nodes, candidates, ↪
 ↪validNodes}, k = kl/l;
B = (Sin[k l] - Sinh[k l])/(Cos[k l] + Cosh[k l]);
A = 1;
f[x_] := A (Cosh[k x] - Cos[k x]) + B (Sinh[k x] - ↪
 ↪Sin[k x]);
a = 0; b = l;
(*绘制振形图并自动标记波节*)
plot = Plot[{f[x]}, {x, a, b},
AxesStyle -> Directive[Black, Thick, Arrowheads[0.04]],
PlotStyle -> {Blue, Thick}, AxesLabel -> {"x/cm", ↪
 ↪"相对振幅"},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold, FontSize -> 12],
PlotRange -> All, ImageSize -> 400,
Epilog -> {PointSize[0.02], Red,
  Table[Point[{Table[
    x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.2},
    Method -> "Secant"], {i, a + 0.1, b - 0.1, 0.2}][[i]],
    0}], {i, 1, IntegerPart[(b - a - 0.2)/0.2] + 1}]},
ClippingStyle -> Automatic];
(*1. 使用步长(0.2cm)搜索所有可能的根*)
candidates =
Table[Check[
x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.2}, Method -> "Secant"],
Null], {i, a + 0.1, b - 0.1, 0.2}];
(*2. 过滤掉无效值和重复值，保留有效根*)
validNodes =
Select[candidates,
NumberQ[#] && Abs[f[#]] < 1*^-6 && 0.1 < # < l - 0.1 &];
(*3. 去除重复根(精度0.01cm)并排序*)
nodes = DeleteDuplicates[Round[validNodes, 0.0001]];
nodes = Sort[nodes];
Return[{plot, nodes}]]

(* ============================================*)
(*第三部分：计算你所有实验数据的理论结果*)
(* ============================================*)
(*实验参数：6个金属片长度(cm)*)
lengths = {7.95, 8.35, 9.45, 10.79, 11.91, 12.81};
labels = {"l1", "l2", "l3", "l4", "l5", "l6"};

(*本征值对应关系：n=1\[RightArrow]kl1,
n=2\[RightArrow]kl2,n=3\[RightArrow]kl3*)
kl1 = 1.8751; (*n=1*)
kl2 = 4.6941; (*n=2*)
kl3 = 7.8548; (*n=3*)

(*初始化结果存储*)
results = {};
```

```
(*批量计算所有长度的n=1,n=2,n=3模式*)
For[i = 1, i <= 6, i++, l = lengths[[i]];
label = labels[[i]];
(*n=1模式*){plot1, nodes1} = calculateVibration[kl1, l, 1];
(*n=2模式*){plot2, nodes2} = calculateVibration[kl2, l, 2];
(*n=3模式(仅计算15和16)*)
If[i >= 5, {plot3, nodes3} = calculateVibration[kl3, l, 3];
results =
Append[results, {label, l, plot1, nodes1, plot2, nodes2, plot3,
  nodes3}],
results =
Append[results, {label, l, plot1, nodes1, plot2, nodes2, Null,
  Null}]];]

(* ============================================*)
(*第四部分: 输出所有波节位置结果*)
(* ============================================*)
Print["===== 修正后的理论波节位置计算结果 ====="]
Print["格式: 金属片编号 | 长度(cm) | n=2理论波节(cm) | n=3理论波节(cm)"]
For[i = 1, i <= 6, i++, label = results[[i, 1]];
l = results[[i, 2]];
nodes2 = results[[i, 6]];
nodes3 = results[[i, 8]];
If[i >= 5,
Print[label, " | ", l, " | ", nodes2[[1]], " | ", nodes3[[1]], ", ",
nodes3[[2]]], Print[label, " | ", l, " | ", nodes2[[1]], " | -"]];]

(* ============================================*)
(*第五部分: 自动生成并导出所有n=1,2,3波形图*)
(* ============================================*)
(*创建图片保存目录*)
If[! DirectoryQ["Sheet_Plots"], CreateDirectory["Sheet_Plots"]];

Print["===== 正在生成并导出波形图 ====="]

(*1. 生成代表性的16金属片的n=1,2,3组合图（推荐用于报告）*)
l6Plot1 = results[[6, 3]];
l6Plot2 = results[[6, 5]];
l6Plot3 = results[[6, 7]];

combinedPlot =
GraphicsGrid[{{l6Plot1, l6Plot2, l6Plot3}}, ImageSize -> 1200,
Spacings -> {20, 10}];

(*显示组合图*)
Print["16金属片n=1,2,3振形组合图:"]
Show[combinedPlot]

(*导出组合图*)
Export["Sheet_Plots/l6_n123_combined.jpg", combinedPlot,
ImageResolution -> 300];

(*2. 批量导出所有金属片的单独波形图*)
For[i = 1, i <= 6, i++, label = results[[i, 1]];
plot1 = results[[i, 3]];
plot2 = results[[i, 5]];
(*导出n=1模式*)
Export["Sheet_Plots/" <> label <> "_n1.jpg", plot1,
ImageResolution -> 300];
(*导出n=2模式*)
Export["Sheet_Plots/" <> label <> "_n2.jpg", plot2,
ImageResolution -> 300];
(*导出l5和16的n=3模式*)If[i >= 5, plot3 = results[[i, 7]];
Export["Sheet_Plots/" <> label <> "_n3.jpg", plot3,
ImageResolution -> 300];];
(*results[[6,3]] (*l6 n=1*)*)
(*results[[6,5]] (*l6 n=2*)*)
(*results[[6,7]] (*l6 n=3*)*)

Print["已导出: ", label, " 的所有波形图"];]

Print["===== 所有波形图已导出至 Sheet_Plots 目录 ====="]
```

Listing 2: k 计算及作图计算代码

```
m = 6;
a = 12;
s = 0.324;
xa := x a;
aa11 = x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] + s x
D[BesselJ[m, xa], {x, 1}] - s m^2 BesselJ[m, xa];
aa22 = x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] + s x
D[BesselI[m, xa], {x, 1}] - s m^2 BesselI[m, xa];
ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
BesselJ[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
BesselJ[m, xa];
ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
BesselI[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
BesselI[m, xa];
f[x_] := aa11 ba22 - aa22 ba11
a1 = 0.1;(*a和b分别为绘图时x的最小值和最大值*)
b = 3;
Plot[{f[x]}, {x, 0, 3}, PlotRange -> 2,
AxesStyle -> Directive[Black, Thick, Arrowheads[0.04]],
PlotStyle -> {Blue, Thick}, AxesLabel -> {x, Y},
LabelStyle -> Directive[Black, Bold],
Epilog -> {PointSize[0.02], Red,
  Table[Point[{Table[
    x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.1}, Method -> "Secant"], {i,
     a1, b, 0.1}][[i]], 0}], {i, 2,
    IntegerPart[(b - a1)/0.1] + 1}]}, ClippingStyle -> Automatic]
Table[x /. FindRoot[f[x], {x, i, i + 0.1}, Method -> "Secant"], {i,
 a1, b, 0.1}]
```

Listing 3: 波节位置计算及作图计算代码

```
m = 6
a = 12
s = 0.324
xr := x r
xa := x a
aa11 = BesselJ[m, xr]
aa22 = BesselI[m, xr]
ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
BesselJ[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2 BesselJ[m, xa]
ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
BesselI[m, xa], {x, 1}] (3 - s) m^2 BesselI[m, xa]
```

```
    n = ({{aa11, aa22}, {ba11, ba22}})
    f[x_, r_] := Evaluate[Det[n]]
    h[r_] = f[2.57184, r]
    Plot[h[r], {r, 0, 12}]
    FindRoot[h[r], {r, 3.8}]
    FindRoot[h[r], {r, 5}]
    FindRoot[h[r], {r, 7}]
    FindRoot[h[r], {r, 9.16}]
    FindRoot[h[r], {r, 10}]
    FindRoot[h[r], {r, 3}]
    FindRoot[h[r], {r, 12}]
```

Listing 4: 数值模拟图代码 (m=0)

```
    m = 0
    a = 0.12
    s = 0.324
    xr := x r
    xa := x a
    aa11 = BesselJ[m, xr]
    aa22 = BesselI[m, xr]
    ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
    x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
    BesselJ[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
    BesselJ[m, xa]
    ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
    x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
    BesselI[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
    BesselI[m, xa]
    n = ({{aa11, aa22}, {ba11, ba22}})
    f[x_, r_] := Evaluate[Det[n]]
    h[r_] = f[104.203, r]
    Z[r_, \[Theta]_] := h[r];
    ZxyABS[r_, \[Theta]_] := {r*Cos[\[Theta]],
      r*Sin[\[Theta]], -Abs[Z[r, \[Theta]]]};
    dr = 0.12*0.005; d\[Theta] = 2*\[Pi]*0.005;
    LstABS =
    Flatten[Table[
    ZxyABS[r, \[Theta]], {r, 0, 0.12, dr}, {\[Theta], 0, ↪
     ↪2*\[Pi],
      d\[Theta]}], 1];
    ListContourPlot[LstABS, Contours -> 12, ContourStyle ↪
     ↪-> None,
    PlotRange -> Full, ColorFunction -> "GrayTones",
    RegionFunction ->
    Function[{x, y}, 0 \[LessSlantEqual] x^2 + y^2 < 0.12^2]]
```

Listing 5: 数值模拟图代码 (m≠0)

```
    m = 6
    a = 0.12
    s = 0.324
    xr := x r
    xa := x a
    aa11 = BesselJ[m, xr]
    aa22 = BesselI[m, xr]
    ba11 = x^3 D[BesselJ[m, xa], {x, 3}] +
    x^2 D[BesselJ[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
    BesselJ[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
    BesselJ[m, xa]
    ba22 = x^3 D[BesselI[m, xa], {x, 3}] +
    x^2 D[BesselI[m, xa], {x, 2}] - (x + m^2 (2 - s) x) D[
    BesselI[m, xa], {x, 1}] + (3 - s) m^2
    BesselI[m, xa]
    n = ({{aa11, aa22}, {ba11, ba22}})
    f[x_, r_] := Evaluate[Det[n]]
    h[r_] = f[257.184, r]
    Z[r_, \[Theta]_] := h[r];
    ZxyABS[r_, \[Theta]_] := {r*Cos[\[Theta]],
      r*Sin[\[Theta]], -Abs[Z[r, \[Theta]]]};
    Z[m_, r_, \[Theta]_] := Sin[m*\[Theta]]*h[r];
    ZxyABS[m_, r_, \[Theta]_] := {r*Cos[\[Theta]],
      r*Sin[\[Theta]], -Abs[Z[m, r, \[Theta]]]};
    dr = 0.12*0.005; d\[Theta] = 2*\[Pi]*0.005;
    LstABS =
    Flatten[Table[
    ZxyABS[m, r, \[Theta]], {r, 0, 0.12, dr}, {\[Theta], ↪
     ↪0, 2*\[Pi],
      d\[Theta]}], 1];
    ListContourPlot[LstABS, Contours -> 20, ContourStyle ↪
     ↪-> None,
    PlotRange -> Full, ColorFunction -> "GrayTones",
    RegionFunction ->
    Function[{x, y}, 0 \[LessSlantEqual] x^2 + y^2 < 0.12^2]]
```